

В.А. Матвеев, В.И. Липатников,
А.В. Алехин

Проектирование волнового твердотельного гироскопа

Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана

Проектирование волнового твердотельного гироскопа

В.А. Матвеев, В.И. Липатников, А.В. Алехин

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

*Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших технических учебных заведений*

М о с к в а

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

1998

УДК 531.383

ББК 39.57

М33

Рецензенты: кафедра "Гироскопы и навигационные комплексы" Тульского политехнического института, зав. каф., д-р техн. наук, проф. В.Я. Распопов; кафедра "Автоматизированные комплексы систем ориентации и навигации" Московского авиационного института, зав. каф., д-р техн. наук, проф. А.В. Репников; д-р техн. наук, академик АН и УД, заслуженный деятель науки и техники России, лауреат Государственной премии проф. Б.И. Назаров.

М33 Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.

Проектирование волнового твердотельного гироскопа: Учеб. пособие для втузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 168 с., ил.

ISBN 5-7038-1323-9

Учебное пособие посвящено основным вопросам проектирования волнового твердотельного гироскопа, включая выбор расчетной модели прибора, анализ его погрешностей, рекомендации по определению параметров систем управления резонатором, съема и обработки информации, методике балансировки и испытаний гироскопа. Учебное пособие написано в соответствии с программой и на базе курса лекций, читаемого профессором В.А. Матвеевым в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Предназначено для студентов и аспирантов, обучающихся по специальности "Гироскопы, навигационные приборы и комплексы", а также для инженеров и научных сотрудников, работающих в области гиросприборостроения и систем управления.

ББК 39.57

© В.А. Матвеев, В.И. Липатников, А.В. Алехин, 1998

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998

© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998

ISBN 5-7038-1323-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время развитие приборостроения во многом определяется тенденцией построения безроторных гироскопов: волоконно-оптических, лазерных, микромеханических, волновых твердотельных гироскопов (ВТГ) и др.

В частности, в авиации широко известны навигационные комплексы, бескарданные инерциальные системы (БИНС), построенные на базе лазерных гироскопов, точность которых достигает $0,01 \dots 0,001$ град/ч. Перспективным представляется применение ВТГ в высокоманевренной авиации и космонавтике, построение на их базе БИНС. Это подтверждают высокие технические характеристики ВТГ: точность до 10^{-3} град/ч, надежность работы в условиях перегрузок, малое время готовности. ВТГ – гироскоп нового поколения. Однако после выхода в 1985 г. фундаментальной работы В.Ф. Журавлева, Д.М. Климова “Волновой твердотельный гироскоп” учебной литературы по ВТГ практически не издавалось. Поэтому выпуск настоящего учебного пособия своевременен.

Отметим традиционную схему построения книги: выбор теоретической модели, ее анализ с целью определения характеристик прибора, построение основных функциональных схем прибора и определение модели его погрешностей.

Иллюстрирование книги конструктивными схемами ВТГ, описание элементной базы прибора, способов регулировки и балансировки прибора, изложение основ методики испытаний прибора способствуют реализации основной цели книги – раскрытию вопросов проектирования ВТГ. К досто-

инствам книги следует отнести простоту изложения материала, интересный подход, в частности, к методике балансировки резонатора, оригинальность модели скорости дрейфа ВТГ и реализации схемы съема информации.

Книга, естественно, не исчерпывает всех вопросов проектирования ВТГ, и ее содержание надо рассматривать применительно к учебному процессу, хотя, без сомнения, материал книги будет полезен и интересен инженерам и научным работникам, занимающимся разработкой и эксплуатацией ВТГ.

*Проф., д-р техн. наук,
действительный член
Академии навигации и
управления движением,
заслуженный деятель
науки РФ*

А.П. Мезенцев

ВВЕДЕНИЕ

Высокие требования, предъявляемые к чувствительным элементам систем ориентации, навигации и управления подвижными объектами, привели к созданию нетрадиционных гироскопических приборов, построенных на новых физических принципах. К такого рода приборам относится волновой твердотельный гироскоп (ВТГ), работа которого основана на использовании инертных свойств стоячих волн, возбужденных во вращающихся осесимметричных оболочках. Преимуществами ВТГ являются: высокая точность, малое потребление мощности, конструктивная простота механических узлов, устойчивость к прерыванию подачи электропитания, малое время готовности, широкий диапазон рабочих температур, устойчивость к воздействию ионизирующего излучения, малая чувствительность к линейным перегрузкам, большой срок службы [29, 30], возможность применения автоматизированного производства при изготовлении ВТГ.

По принципу действия и применению в различного рода гироскопических системах ВТГ подразделяются на ВТГ, работающие в режиме ДУС – датчика угловой скорости (ВТГ-ДУС), и ВТГ, работающие в режиме ИГ – интегрирующего гироскопа (ВТГ-ИГ). ВТГ-ДУС обладает невысокой точностью (случайная составляющая скорости ухода на уровне 10^{-2} град/с). ВТГ-ИГ имеет сравнительно высокую точность (случайная скорость ухода может быть достигнута на уровне 10^{-4} град/ч). ВТГ-ИГ является перспективным чувствительным элементом бескарданных инерциальных навигационных систем (БИНС) самолетов и космических летательных аппаратов.

Эффект инертности упругих волн во вращающихся осесимметричных телах в 1890 г. открыл теоретически и подтвердил экспериментально Г.Х. Брайен [23], который показал, что при вращении вибрирующей оболочки (бокала) в результате действия кориолисовых сил инерции происходит расщепление собственной частоты основной формы изгибных колебаний ее стенок, приводящее к прецессии стоячей волны как относительно бокала, так и в инерциальном пространстве. Результаты исследования Брайена долгое время не находили практического применения, хотя и упоминались в трудах ученых [20].

Первые попытки создания ВТГ-ДУС относятся к 1960-м гг. Существует несколько вариантов построения ДУС, в качестве чувствительных элементов (резонаторов) которых используют кольцо, цилиндр [1, 25, 26], полусферическую оболочку [3, 24, 28]. Стоячая волна, возбужденная в резонаторе, поворачивается на угол, пропорциональный величине проекции входной угловой скорости на ось его симметрии. При этом проявить себя в полной мере эффект Брайена не может, так как для поддержания колебаний резонатора применяется позиционное возбуждение [3], что ограничивает угол поворота стоячей волны.

К середине 80-х гг. благодаря возросшему уровню технологии и электроники появилась возможность создания ВТГ-ИГ. В работе [30] описан прибор американской фирмы Delco Electronics, разработчиком которого путем выбора высокодобротного материала полусферического резонатора и замены позиционного возбуждения параметрическим [3] удалось создать интегрирующий ВТГ (ВТГ-ИГ).

В нашей стране экспериментальные образцы прецизионных ВТГ созданы на предприятии АО РПКБ (Раменское приборостроительное конструкторское бюро). Помимо создания образцов гироскопов разработаны и внедрены в производство автоматизированные стенды на базе ПЭВМ для испытаний резонаторов, их динамической балансировки с помощью лазера, стенд полунатурного моделирования для точностных испытаний ВТГ, а также методики оценки таких

параметров, как неоднородность зазора между электродом и резонатором, расщепление собственной частоты резонатора, величина разносторонности.

Основы аналитической теории ВТГ изложены в работах [10 – 12]. В них показано, что эффект Брайена сохраняется при вращении кольцевого резонатора с переменной угловой скоростью. В монографии [10] исследованы метод осреднения уравнения движения кольцевого резонатора, разработана теория функционирования идеального гироскопа. В [16] разработана оболочечная модель резонатора ВТГ.

Настоящая книга посвящена основным вопросам проектирования ВТГ. Вопросы функционирования прибора в различных условиях изложены с единых позиций теории колебаний упругих систем и волновых процессов. Рассмотрены методические и инструментальные погрешности ВТГ, проанализирована работа системы управления стоячей волной в приборе. Изложены вопросы балансировки резонатора ВТГ и предложена оригинальная методика балансировки.

1. ПРИНЦИП РАБОТЫ И КОНСТРУКЦИИ ВТГ

В этой главе изложен принцип работы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) и рассмотрены известные конструкции прибора.

1.1. Принцип работы гироскопа с полусферическим резонатором

Допустим, что в резонаторе возбуждены колебания, имеющие форму стоячей волны, пучности которой находятся в точках A, B, C, D (рис. 1.1, a).

При вращении полусферы вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω точки A, B, C, D совершают сложное движение [3]: относительное – со скоростями $\bar{V}_A, \bar{V}_B, \bar{V}_C, \bar{V}_D$ и переносное – с угловой скоростью $\bar{\Omega}$. Появившееся кориолисово ускорение элементов массы в точках A, B, C, D обозначим $\bar{W}_{KA}, \bar{W}_{KB}, \bar{W}_{KC}, \bar{W}_{KD}$ соответственно. Кориолисовы силы инерции $\bar{P}_{KA}, \bar{P}_{KB}, \bar{P}_{KC}, \bar{P}_{KD}$, приложенные в точках A, C и B, D , направлены в противоположные стороны и создают пары сил. Пары $\bar{P}_{KA} - \bar{P}_{KC}$ и $\bar{P}_{KB} - \bar{P}_{KD}$ (рис. 1.1, b) противоположны по направлению и в сумме дают равнодействующую пару кориолисовых сил инерции, модуль которой пропорционален значению угловой скорости вращения основания. Эта пара сил вызывает вращение (прецессию) волнового поля (стоячей волны) относительно резонатора и в инерциальном пространстве. Определяя поло-

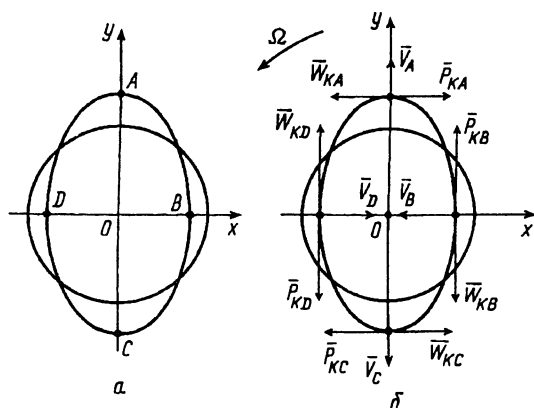


Рис. 1.1. Механизм образования прецессии стоячей волны: *a* – невращающийся резонатор ($\Omega = 0$); *б* – вращающийся резонатор ($\Omega \neq 0$)

жение стоячей волны относительно корпуса прибора, можно получить информацию об угле поворота основания ВТГ в инерциальном пространстве.

Для угла $\vartheta(t)$, определяющего ориентацию волновой картины колебаний резонатора по основной форме (рис. 1.2) относительно оболочки, имеет место следующее соотношение [10 – 12]:

$$\vartheta(t) = -K \int_0^t \Omega(\tau) d\tau = -k\Delta\psi,$$

где $\Omega(t)$ – входная угловая скорость; K – масштабный коэффициент ВТГ; $\Delta\psi$ – угол поворота основания.

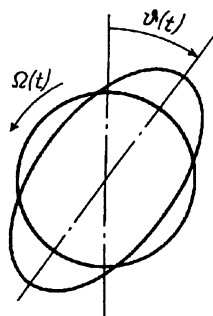


Рис. 1.2. Прецессия волнового поля относительно резонатора

Аналогичное соотношение имеет место между входной угловой скоростью и углом ориентации волнового поля относительно инерциального пространства:

$$\vartheta_*(t) = k \int_0^t \Omega(\tau) d\tau,$$

где $k = 1 - K$.

В работе [30] приведены результаты эксперимента, который обнаруживает поворот стоячей волны относительно инерциального пространства на угол $\sim 63^\circ$ при повороте резонатора на угол 90° , что соответствует повороту стоячей волны относительно резонатора на угол 27° , т.е. $K \approx 0,3$.

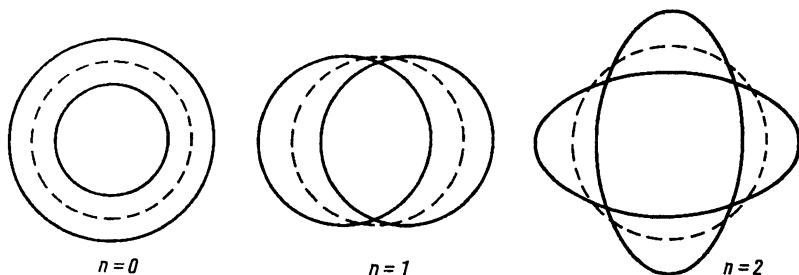


Рис. 1.3. Собственные формы колебаний резонатора

На рис. 1.3 показаны наиболее важные собственные формы колебаний резонатора. Нулевая форма ($n = 0$) соответствует колебаниям растяжения-сжатия, она не учитывается при исследовании динамики ВТГ, поскольку деформации растяжения резонатора малы по сравнению с деформациями изгиба. Первая форма ($n = 1$) соответствует перемещению резонатора как твердого тела, ее необходимо учитывать при решении уравнений движения ВТГ, так как эта форма возбуждается вследствие деформации ножки резонатора. Вторая форма ($n = 2$) используется в качестве рабочей, она является наинизшей собственной формой изгибных колебаний полусферического резонатора.

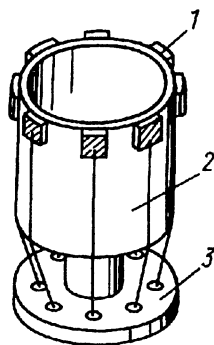
1.2. Конструкции ВТГ

Как сказано выше, в зависимости от функционального назначения ВТГ подразделяются на ВТГ, работающие в режиме датчика угловой скорости (ВТГ-ДУС), и ВТГ, работающие в интегрирующем режиме (ВТГ-ИГ). На выходе последних снимается информация по приращению угла поворота основания гироскопа. Такое двойное применение ВТГ порождает многообразие конструктивных и функциональных электрических схем.

На рис. 1.4 показана схема вибрационного цилиндрического ВТГ-ДУС фирмы Magsoni. Однородный металлический или керамический цилиндр 2 с одной стороны закреплен на основании 3. Изгибные колебания свободной кромки цилиндра на резонансной частоте создаются особым расположением датчиков 1 на краю цилиндра. Датчики могут быть емкостного, электромагнитного или пьезоэлектрического типа. В первых двух случаях между цилиндром и электродами статорных частей датчиков имеется рабочий зазор, в последнем – датчики монтируются непосредственно на самом цилиндре.

Рис. 1.4. Вибрационный цилиндрический ВТГ-ДУС:

- 1 – пьезоэлектрические датчики;
2 – цилиндрический резонатор;
3 – основание



Использование пьезоэлектрических датчиков 1 (рис. 1.5) существенно упрощает конструкцию прибора и позволяет получить большие выходные сигналы. Возбуждающая сила, приложенная к кромке цилиндрического резонатора 2 со

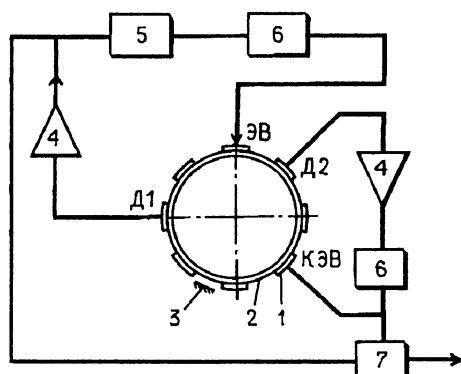


Рис. 1.5. Функциональная схема вибрационного цилиндрического ВТГ-ДУС:

1 – пьезоэлектрические датчики; 2 – цилиндрический резонатор; 3 – основание; 4 – предварительный усилитель; 5 – схема стабилизации амплитуды и фазовой синхронизации; 6 – широкополосный фильтр; 7 – демодулятор; Д1 и Д2 – датчики перемещения; ЭВ – электрод возбуждения; КЭВ – компенсационный электрод возбуждения

стороны двух электродов возбуждения (ЭВ), создает колебательную картину в форме стоячей волны (диаграмму вибрации) с пучностями по осям ЭВ и датчиков перемещения Д1. Узлы диаграммы вибрации располагаются по осям компенсационного электрода возбуждения (КЭВ) и Д2 под углом 45° по отношению к датчикам перемещения Д1 (см. рис. 1.5).

Частота возбуждающей силы синхронизируется с резонансной частотой резонатора 2 с помощью автоколебательного контура, включающего Д1, предварительный усилитель 4, схему стабилизации амплитуды и фазовой синхронизации 5, широкополосный фильтр 6 и ЭВ.

При отсутствии входной угловой скорости ориентация стоячей волны остается неизменной, пучности совпадают с осями ЭВ и Д1. В случае вращения цилиндра вокруг центральной оси за счет сил Кориолиса в узловых областях (называемых в дальнейшем для краткости узлами) возникают радиальные колебания, амплитуда которых пропорциональна входной угловой скорости. Иначе говоря, появляется дополнительная стоячая волна, ориентированная под углом 45°

относительно основной стоячей волны. Наложение двух стоячих волн эквивалентно повороту основной стоячей волны на угол, пропорциональный входной угловой скорости. С Д2 снимается сигнал, который в дальнейшем преобразуется с помощью измерительного контура, состоящего из предварительного усилителя 4 и широкополосного фильтра 6, и подается на КЭВ, устраняющий колебания в узлах. Компенсационное напряжение, измеряемое по выходу с демодулятора 7, пропорционально входной угловой скорости. Максимальная точность, достигнутая при испытании ВТГ-ДУС такого класса, составляет 0,01 град/с.

На рис. 1.6 – 1.9 показаны конструктивные и функциональные схемы ВТГ-ДУС с полусферическим резонатором разработки фирмы ГМС. Эти конструкции наряду с незначительными отличиями принципиально имеют одни и те же основные элементы, поэтому при описании конструкций остановимся на одной из них (см. рис. 1.6).

На основание 4 прибора устанавливается корпус с восемью электродами 3, расположенными под углами 45° между собой. Все электроды 3 электрически изолированы от корпуса и окружены экранами (экраны заштрихованы). При этом на экраны датчиков перемещения (Д) возбуждающего и измерительного каналов подается напряжение, снимаемое с выходов соответствующих предварительных усилителей. Для повышения чувствительности вводят постоянную емкость между электродом и экраном и тем самым исключают возникновение паразитных емкостей. Экраны электродов возбуждения (ЭВ) 3 заземлены.

Высокая точность геометрических параметров, соосность сопрягаемых поверхностей корпуса, ЭВ и Д, экранов достигаются их совместной обработкой в процессе изготовления.

Резонатор 2 изготавливается из материала с высокой добротностью. К таким материалам относятся алюминиевые сплавы, кремниево-алюминиевые бронзы, плавленный кварц. Добротность резонаторов, выполненных из этих материалов,

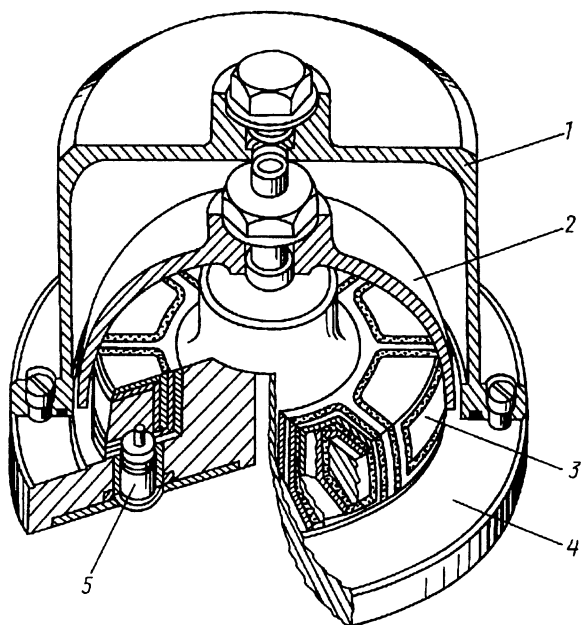


Рис. 1.6. ВТГ-ДУС с полусферическим резонатором:
 1 – вакуумный кожух; 2 – резонатор; 3 – электроды возбуждения и датчики перемещения; 4 – основание; 5 – гермоввод

составляет ~ 3000 на воздухе и 12000 (для бронзы) при остаточном давлении 1,33 Па.

Радиус средней поверхности резонатора равен $25,4 \cdot 10^{-2}$ м. Стенка резонатора, изменяющаяся в своей полусферической части от максимума на полюсе до минимума на кромке по закону $(h_0/4)(1 + \cos \theta)^2$, заканчивается цилиндрической частью на кромке толщиной $0,6 \cdot 10^{-3}$ м. Здесь θ – сферический угол между осью симметрии и направлением, определяемым текущим значением сечения.

Такая конструкция позволяет обеспечить однородную деформацию стенки резонатора, минимальные потери в заделке, максимальную амплитуду колебаний цилиндрической кромки, а также повысить чувствительность и точность прибора.

В процессе изготовления резонатора 2 обеспечивается высокая точность по геометрии и соосности полусферы по отношению к ножке, с помощью которой он крепится в корпусе.

Резонансная частота* резонаторов в рассматриваемых конструкциях находится в пределах 2100...2700 Гц, расщепление резонансной частоты не превышает 0,03 Гц. Последнее обеспечивается балансировкой резонаторов путем съема массы с их кромки в соответствующих точках.

Подача напряжения возбуждения на ЭВ и съём сигналов с Д осуществляются через одинарные и коаксиальные (экранированные) гермовводы 5.

Кожух 1 обеспечивает герметичность конструкции и остаточное давление в полости прибора не выше 1,33 Па.

Разработанная технология изготовления узлов обеспечивает высокую точность геометрических и угловых размеров ЭВ, Д, равномерность рабочих зазоров (~250 мкм) и позволяет точно совмещать пучность с направлением ЭВ, а узлы диаграмм вибрации устанавливать в соответствии с нулем Д. Использование по каждой из осей сдвоенных электродов (см. рис. 1.6) дает возможность свести к минимуму погрешности изготовления прибора и достичь максимальной точности.

Принцип действия ВТГ-ДУС с полусферическим резонатором аналогичен описанному выше принципу действия ВТГ. Взаимосвязь контуров схемы возбуждения и съема сигналов обеспечивается схемой, приведенной на рис. 1.7.

* $\omega_0 = l(k) \frac{h}{R^2} \sqrt{\frac{E}{3(1+\nu)\rho}}$, где $l(k)$ зависит от формы колебаний кольца, характеризуемой k – половиной числа узловых меридианов (для основной формы колебаний $n = 2$ величина $k = 2$ и $l(k) = 2,62$); h , R – соответственно толщина и радиус оболочки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона (для плавленого кварца $\nu = 0,17 \dots 0,19$); ρ – плотность материала.

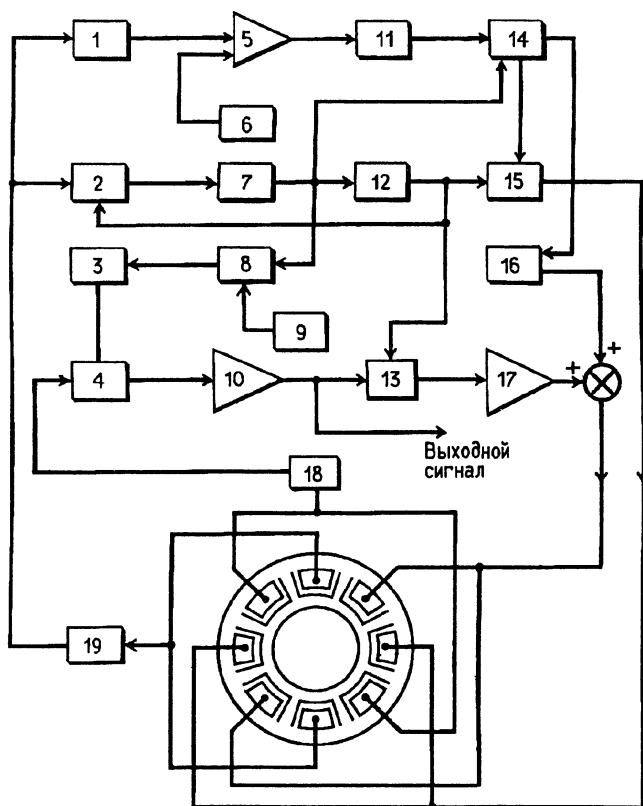


Рис. 1.7. Функциональная схема ВТГ-ДУС:

1 – 4 – демодуляторы; 5, 10 – усилитель и компаратор; 6 – источник эталонного напряжения; 7 – управляемый генератор; 8 – фазосдвигающая схема; 9 – регулировка фазы; 11 – фильтр; 12 – делитель частоты; 13 – модулятор; 14 – преобразователь постоянного напряжения; 15, 16 – усилители мощности; 17 – усилитель; 18, 19 – усилители датчиков перемещения

Конструкции ВТГ-ДУС, показанные на рис. 1.8 и 1.9, отличаются от рассмотренной лишь тем, что ЭВ расположены на внутренних, а Д – на наружных корпусах, выполняющих одновременно роль кожухов. Для уменьшения демпфирования колебаний резонатора в рабочем режиме между ЭВ и Д на внутреннем и наружном корпусах дополнительно выбраны пазы.

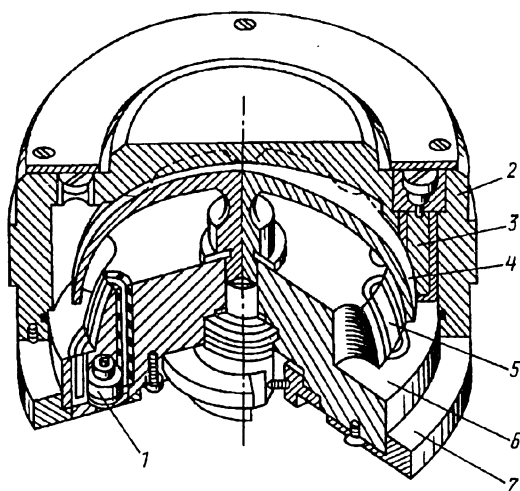


Рис. 1.8. ВТГ-ДУС:

1 – гермоввод; 2 – наружный корпус; 3 – датчик перемещений; 4 – резонатор; 5 – электрод возбуждения; 6 – внутренний корпус; 7 – основание

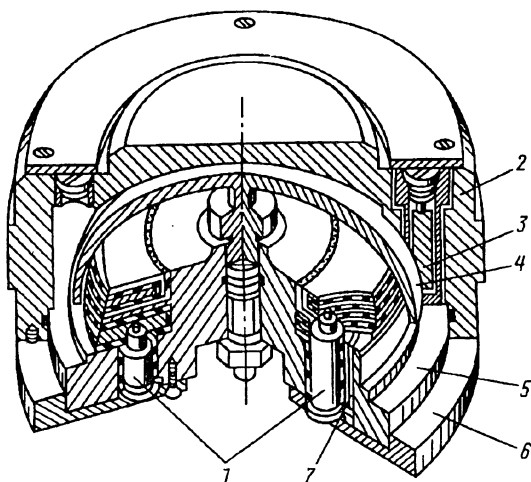


Рис. 1.9. ВТГ-ДУС:

1 – гермоввод; 2 – наружный корпус; 3 – датчик перемещения; 4 – резонатор; 5 – внутренний корпус; 6 – основание; 7 – электрод возбуждения

На рис. 1.10–1.12 показаны конструкции ВТГ фирм GMS, Delco, АО РПКБ, работающих в интегрирующем режиме. Примерные технические характеристики гироскопа см. в приложении 3.

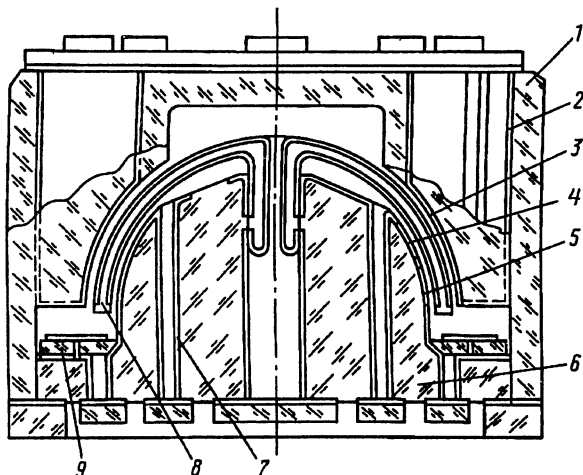


Рис. 1.10. ВТГ фирмы GMS:

1 – наружный корпус; 2 – монтажный канал датчика перемещения; 3 – электрод датчика перемещения; 4 – кольцевой электрод возбуждения; 5 – отдельный электрод; 6 – внутренний корпус; 7 – монтажный канал кольцевого электрода; 8 – резонатор; 9 – монтажная плата

Принципиальное отличие ВТГ фирмы GMS (см. рис. 1.10) состоит в том, что в нем используется резонатор 8 с одной ножкой в форме зонтика, а в других двух (см. рис. 1.11 и 1.12) конструкциях – со сквозной.

Конструкция со сквозной ножкой более предпочтительна, так как при наличии внешних динамических воздействий в конструкции на рис. 1.10 имеют место угловые колебания резонатора, в конструкциях на рис. 1.11 и 1.12 в силу симметрии угловые колебания отсутствуют, а линейные колебания незначительны. Это обстоятельство позволяет повысить точность прибора.

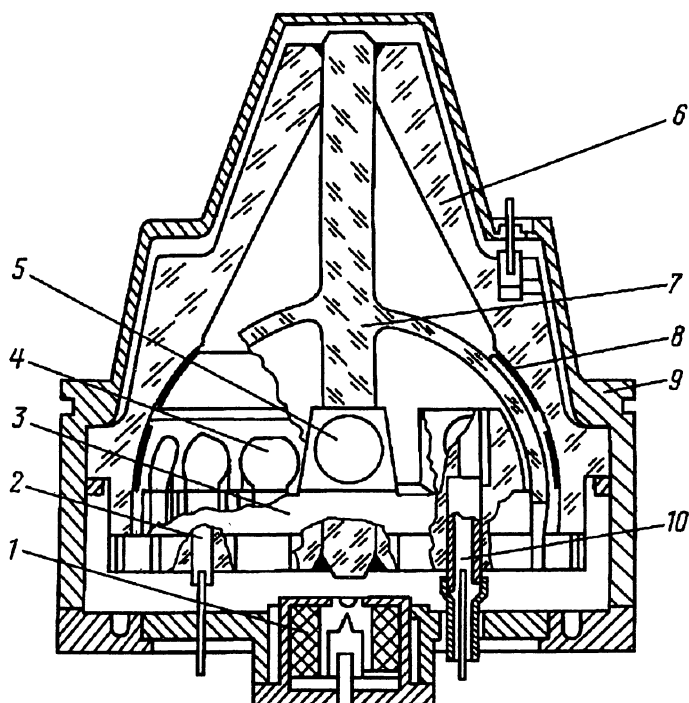


Рис. 1.11. ВТГ фирмы Delco:

1 – встроенный насос; 2 – гермоввод; 3 – внутренний корпус; 4 – электрод возбуждения; 5 – датчик перемещения; 6 – наружный корпус; 7 – резонатор; 8 – кольцевой электрод; 9 – кожух; 10 – коаксиальный гермоввод

Рассмотрим подробнее конструкции, показанные на рис. 1.11, 1.12. ВТГ представляет собой прибор, состоящий из полусферического резонатора 7, внутреннего 3 и наружного 6 корпусов с расположенными на них системами электродов съема информации и возбуждения, основания с вакуумной колодкой и установленными в ней коаксиальными 10 и одинарными 2 гермовводами, кожуха 9 с ниппелем и встроенного нераспыляемого геттерного насоса 1 для поддержания глубокого вакуума внутри прибора в процессе экс-

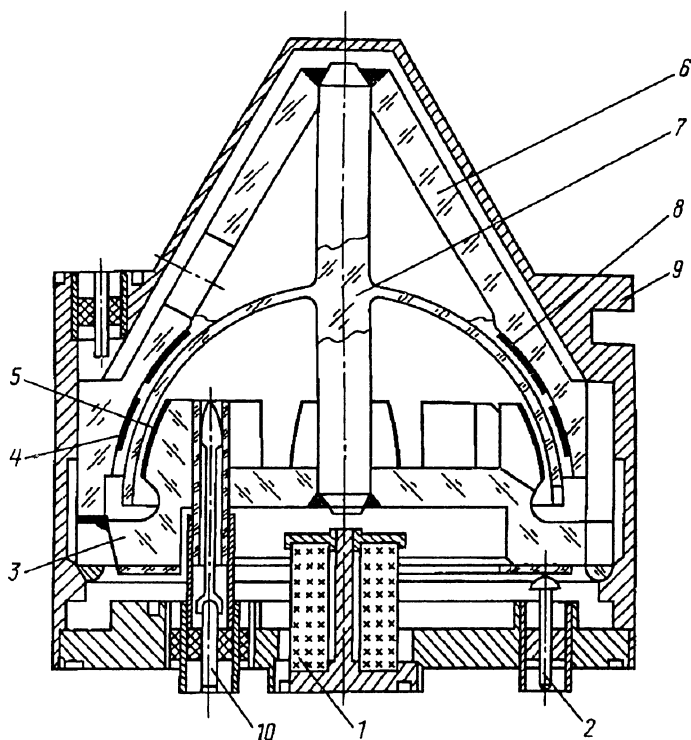


Рис. 1.12. ВТГ разработки АО РПКБ:

1 – встроенный насос; 2 – гермоввод; 3 – внутренний корпус; 4 – электрод возбуждения; 5 – датчик перемещения; 6 – наружный корпус; 7 – резонатор; 8 – кольцевой электрод; 9 – кожух; 10 – коаксиальный гермоввод

плутации. Полусферический резонатор 7 является чувствительным элементом прибора. Сквозная ножка выполнена как единое целое с полусферой. Материал резонатора и корпусов (плавленное кварцевое стекло) выбран из условия максимальной добротности и технологических требований к сопрягаемым узлам. Наружная и внутренняя поверхности резонатора металлизированы. Ножка предназначена для передачи электрического контакта на полусферу, выставки и крепления резонатора в корпусах посредством пайки.

На наружном корпусе *б* имеются 16 отдельных ЭВ и кольцевой ЭВ, предназначенные для возбуждения и поддержания колебаний резонатора в рабочем режиме; на внутреннем корпусе *з* – восемь электродов системы съема информации, формирующие два измерительных канала, расположенных по отношению друг к другу под углом 45° .

Электроды выполнены напылением на сферическую поверхность металлической пленки соответствующей конфигурации. Рабочие зазоры между резонатором и корпусами *з* и *б* составляют сотни микрометров.

Электрический монтаж внутри прибора осуществляется посредством многослойной печатной платы.

Кожух *г* с ниппелем служат для создания сверхвысокого вакуума ($\sim (1,33 \dots 0,133) 10^{-6}$ Па) в полости прибора в процессе вакуумирования и герметизации прибора.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАТОРА ВТГ

В этой главе приведен анализ уравнений движения полусферического и кольцевого резонаторов ВТГ; описаны свойства идеального резонатора, как свободного, так и в условиях позиционного и параметрического возбуждений; указаны принципы съема и обработки информации; даны рекомендации по применению моделей резонатора ВТГ в различных условиях.

2.1. Вывод уравнений движения резонатора ВТГ на основе гипотезы Кирхгофа – Лява

Резонатор ВТГ выполнен в виде тонкостенной полусферической оболочки, закрепленной на цилиндрической ножке в окрестности полюса (рис. 2.1). Математическая модель оболочки строится на основе гипотезы Кирхгофа – Лява [2], которая заключается в следующем: любая прямая,

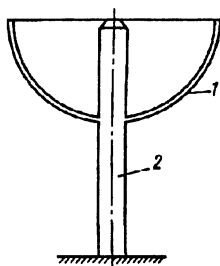


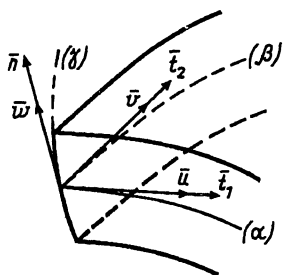
Рис. 2.1. Резонатор ВТГ:

1 – оболочка; 2 – ножка

нормальная к средней поверхности оболочки до деформации, остается нормальной к этой поверхности и после деформации; длина отрезка нормали вдоль толщины оболочки остается постоянной в процессе деформации; нормальные напряжения, возникающие между соседними слоями оболочки, параллельными средней поверхности, малы по сравнению с другими компонентами тензора напряжений, и ими можно пренебречь.

Рис. 2.2. Схема деформации оболочки:

(α) , (β) , (γ) – координатные линии; \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} – компоненты вектора перемещения; \bar{t}_1 , \bar{t}_2 , \bar{n} – единичные векторы



Гипотеза Кирхгофа – Лява дает возможность установить геометрическую картину деформации оболочки [2]. В общем случае деформация является суммой касательных перемещений $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ точек средней поверхности и нормального перемещения $w(\alpha, \beta)$ этой же поверхности; здесь α и β – локальные координаты точки на средней поверхности полусферической оболочки (рис. 2.2).

Согласно гипотезе Кирхгофа – Лява, компоненты тензоров напряжений и деформаций (σ и ϵ соответственно) подчинены следующим условиям [2]:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\gamma} &= e_{\beta\gamma} = e_{\gamma\gamma} = 0; \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= 0, \end{aligned}$$

где γ – “вертикальная” координата точек, лежащих внутри оболочки (см. рис. 2.2).

С помощью этих соотношений закон Гука, отражающий линейную связь тензоров напряжений и деформаций, можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (e_{\alpha\alpha} + \nu e_{\beta\beta}); \\ \sigma_{\beta} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (e_{\beta\beta} + \nu e_{\alpha\alpha}); \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} e_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Компоненты тензора деформаций разложим по степеням координаты γ и оставим в полученных разложениях только линейные относительно γ слагаемые:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_1 + \varkappa_1 \gamma + o(\gamma); \\ e_{\beta\beta} &= \varepsilon_2 + \varkappa_2 \gamma + o(\gamma); \\ e_{\alpha\beta} &= \omega + \tau \gamma + o(\gamma). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Коэффициенты разложений (2.2) имеют следующий геометрический смысл: ε_1 и ε_2 являются относительными удлинениями координатных линий; ω характеризует изменение угла между координатными линиями (деформация сдвига); \varkappa_1 и \varkappa_2 характеризуют изменение главных кривизн средней поверхности при переходе в деформированное состояние (деформация изгиба); τ характеризует деформацию кручения средней поверхности.

Значения коэффициентов разложений (2.2) целесообразно привести сразу для полусферической оболочки, для которой $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$ – сферические координаты, R – радиус средней поверхности в недеформированном состоянии (рис. 2.3), тогда справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(w + u \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \\ \omega &= \frac{1}{R} \left(-v \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right); \\ \tau &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \right); \\ \varkappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ \varkappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \operatorname{ctg} \theta \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

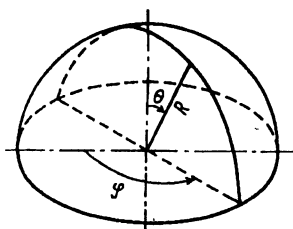


Рис. 2.3. Сферические координаты

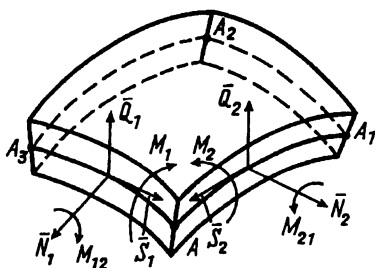


Рис. 2.4. Схема нагрузок, действующих на элемент оболочки

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 + (\alpha_1 + \nu \alpha_2) \gamma]; \\ \sigma_{\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 + (\alpha_2 + \nu \alpha_1) \gamma]; \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} (\omega + \tau \gamma).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Рассмотрим движение выделенного элемента оболочки, для которой координатные линии являются линиями кривизны (рис. 2.4); очевидно, что сферическая оболочка обладает таким свойством. На рис. 2.4 точки имеют следующие координаты: $A(\alpha, \beta)$, $A_1(\alpha + d\alpha, \beta)$, $A_2(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, $A_3(\alpha, \beta + d\beta)$.

Согласно принципу Даламбера, выделенный элемент находится в состоянии равновесия, если сумма активных сил, сил инерции, а также моментов этих сил, приложенных к нему, равна нулю.

Введем в рассмотрение силы и моменты, действующие на выделенный элемент со стороны остальной части оболочки (см. рис. 2.4):

N_1, N_2 — нормальные силы;

S_1, S_2 — сдвигающие силы;

Q_1, Q_2 – перерезывающие силы;

M_1, M_2 – изгибающие моменты;

M_{12}, M_{21} – крутящие моменты.

Обозначим проекции сил инерции, отнесенных к единице площади средней поверхности, на оси $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}$ локальной системы координат через X, Y, Z соответственно.

Отметим, что все силовые факторы приведены на единицу длины соответствующей координатной линии средней поверхности оболочки.

Силовые факторы связаны с компонентами тензора напряжений следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma; & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma; \\ S_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma; & S_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma; \\ M_1 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\alpha \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma; & M_2 &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\beta \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma; \\ M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma; & M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \gamma d\gamma; \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\gamma\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma; & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\gamma\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) d\gamma, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где h – толщина стенки оболочки.

Подставляя (2.4) в (2.5) и выполняя интегрирование, получаем выражения для сил и моментов через составляющие деформации:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \\
 S_1 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; \\
 M_1 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varkappa_1 + \nu\varkappa_2 + \frac{1}{R} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \right]; \\
 M_{12} &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(2\tau + \frac{\omega}{R} \right); \\
 N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); \\
 S_2 &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; \\
 M_2 &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\varkappa_2 + \nu\varkappa_1 + \frac{1}{R} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \right]; \\
 M_{21} &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(2\tau + \frac{\omega}{R} \right).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Уравнения равновесия элемента оболочки, изображенного на рис. 2.4, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + (N_1 - N_2) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial S_2}{\partial \beta} &= -Q_1 - RX; \\
 \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} + (S_1 + S_2) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= -Q_2 - RY; \\
 \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha} + Q_1 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial Q_2}{\partial \beta} - (N_1 + N_2) &= -RZ; \\
 \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + (M_1 - M_2) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta} &= -RQ_1; \\
 \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial M_2}{\partial \beta} &= RQ_2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

После исключения перерезывающих сил Q_1 и Q_2 и подстановки $\alpha = \theta$, $\beta = \varphi$ получаем:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial M_1}{\partial \theta} + (M_2 - M_1) \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_1}{\partial \theta} + (N_1 - N_2) R \operatorname{ctg} \theta = -R^2 X; \\
 & -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta + \\
 & + R \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + (S_1 + S_2) R \operatorname{ctg} \theta + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} = -R^2 Y; \quad (2.8) \\
 & -\frac{\partial^2 M_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial M_1}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \\
 & + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial^2 M_{21}}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + \\
 & + M_1 - M_2 - R(N_1 + N_2) = -R^2 Z.
 \end{aligned}$$

В число внешних сил, приложенных к резонатору, необходимо включить силы инерции. Найдем выражения для сил инерции в случае, когда резонатор вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω (рис. 2.5).

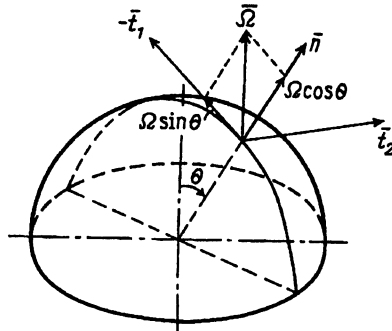


Рис. 2.5. К расчету сил инерции

Абсолютное ускорение $\bar{a} = d^2 \bar{w} / dt^2$ произвольной точки A средней поверхности можно найти по формуле Ривальса:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \ddot{\bar{w}} + \left[\dot{\bar{\Omega}} \times \bar{w} \right] + 2 \left[\bar{\Omega} \times \dot{\bar{w}} \right] + \left[\bar{\Omega} \times \left[\bar{\Omega} \times \bar{w} \right] \right], \quad (2.9)$$

где \bar{a}_0 – абсолютное ускорение вершины трехгранника $\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}\}$; $\ddot{\bar{w}}$ – ускорение точки A относительно трехгранника $\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}\}$; $\dot{\bar{w}}$ – скорость A относительно трехгранника $\{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}\}$; $\dot{\bar{\Omega}}$ – угловое ускорение резонатора.

Проектируя (2.9) на оси $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{n}$ локальной системы координат, получаем:

$$\begin{aligned} a_{t_1} &= \ddot{u} + \dot{\Omega}w \cos \theta + \Omega^2(R + w) \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + \Omega^2u \cos^2 \theta - 2\Omega\dot{v} \cos \theta; \\ a_{t_2} &= \ddot{v} + \dot{\Omega}(R + w) \sin \theta - \dot{\Omega}u \cos \theta + \Omega^2u + \\ &\quad + 2\Omega(\dot{w} \sin \theta + \dot{u} \cos \theta); \\ a_n &= \ddot{w} - \dot{\Omega}v \sin \theta + \Omega^2(R + w) \sin^2 \theta + \\ &\quad + \Omega^2u \sin \theta \cos \theta - 2\Omega\dot{v} \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В дальнейшем будем рассматривать такое вращение резонатора, при котором изменениями угловой скорости Ω , а также квадратом ее значения можно пренебречь, другими словами, рассматриваются лишь медленные вращения резонатора.

С учетом этого допущения найдем выражения для сил инерции при $\theta = \pi/2$, т.е. на свободной кромке резонатора, поскольку основной интерес для исследования представляют колебания, локализованные вблизи свободного края резонатора [19]. Запишем силы инерции в виде

$$\begin{aligned} X &= -\rho h a_{t_1} = -\rho h \ddot{u}; \\ Y &= -\rho h a_{t_2} = -\rho h (\ddot{v} + 2\Omega\dot{w}); \\ Z &= -\rho h a_n = -\rho h (\ddot{w} - 2\Omega\dot{v}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Далее, подставляя выражения (2.6) и (2.11) в уравнения (2.8) и выполняя дифференцирование при $\theta = \pi/2$, получаем уравнения движения кромки полусферического резонатора, вращающегося вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω

и находящегося под действием внешней распределенной нагрузки:

$$\begin{aligned}
 & \left(H + \frac{D}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(H_1 + \frac{D_1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \left(\nu H + H_1 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\nu D + D_1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \varphi} + H (1 + \nu) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{D}{R^2} - \rho R^2 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + R X_a = 0; \\
 & \left(H_1 + \frac{D_1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \varphi} + \left(H + \frac{D}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \left(H_1 + \frac{D_1}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \\
 & \quad + H (1 + \nu) \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \\
 & \quad - \rho R^2 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2 \rho R^2 h \Omega \frac{\partial w}{\partial t} + R Y_a = 0; \\
 & - H (1 + \nu) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) - H (1 + \nu) \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \\
 & \quad + \frac{D}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) - 2 H (1 + \nu) w - \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \rho R^2 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \rho R^2 h \Omega \frac{\partial v}{\partial t} + R Z_a = 0,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $H = Eh/(1 - \nu^2)$; $H_1 = Eh/[2(1 + \nu)]$; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$; $D_1 = Eh^3/[24(1 + \nu)]$; X_a, Y_a, Z_a – проекции внешней активной распределенной нагрузки на оси локальной системы координат.

Рассмотрим случай свободных колебаний резонатора ($X_a = Y_a = Z_a = 0$). Кроме того, допустим, что резонатор идеален, т.е. все его параметры: плотность, толщина, радиус, модуль Юнга, коэффициент Пуассона – не зависят от окружного угла и являются постоянными величинами.

Для получения решения уравнений (2.12) с нулевыми правыми частями разложим перемещения точек резонатора

по собственным формам колебаний нерастяжимой оболочки, следуя работе [20]:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\theta) \cos 2\varphi \\ V(\theta) \sin 2\varphi \\ W(\theta) \cos 2\varphi \end{bmatrix} p(t) + \begin{bmatrix} U(\theta) \sin 2\varphi \\ -V(\theta) \cos 2\varphi \\ W(\theta) \sin 2\varphi \end{bmatrix} q(t), \quad (2.13)$$

где $U(\theta) = V(\theta) = \sin \theta \cdot \operatorname{tg}^2(\theta/2)$, $W(\theta) = (2 + \cos \theta) \operatorname{tg}^2(\theta/2)$ – функции Релея [20], определяющие колебания второй собственной формы колебаний нерастяжимой оболочки.

В проекциях на локальные оси координат имеем:

$$\begin{aligned} u(\theta, \varphi, t) &= U(\theta) [p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi]; \\ v(\theta, \varphi, t) &= V(\theta) [p(t) \sin 2\varphi - q(t) \cos 2\varphi]; \\ w(\theta, \varphi, t) &= W(\theta) [p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в уравнения (2.12) и применяя метод Бубнова – Галеркина (см. приложение 2) при составлении дифференциальных уравнений для функций $p(t)$ и $q(t)$ получаем уравнения, описывающие динамику второй собственной формы колебаний идеального полусферического резонатора:

$$\begin{cases} m_0 \ddot{p}(t) - 2\Omega b \dot{q}(t) + c_0 p(t) = 0; \\ m_0 \ddot{q}(t) + 2\Omega b \dot{p}(t) + c_0 q(t) = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} m_0 &= -\rho h^2 R^2 \int_0^{\pi/2} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \theta \, d\theta; \\ b &= 2\rho h R^2 \int_0^{\pi/2} VW \sin \theta \, d\theta; \end{aligned}$$

$$c_0 = \int_0^{\pi/2} \left\{ \left(H + \frac{D}{R^2} \right) (U U'' - 4V^2) + \left(H_1 + \frac{D_1}{R^2} \right) \times \right.$$

$$\times (VV'' - 4U^2) + \left[H(1 + \nu) + \frac{4D}{R^2} \right] (W'U + 4WV - U'W) - \\ - 2H(1 + \nu)W^2 + \frac{D}{R^2} [U'''W - UW''' - \\ - 2(W''V + V''W + 8W''W - W^{IV}W - 16W^2)] \} \sin \theta d\theta.$$

Рассмотрим радиальные колебания кромки резонатора:

$$w(\varphi, t) = W(\pi/2) [p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi]. \quad (2.16)$$

Возьмем на плоскости декартову систему координат и рассмотрим траекторию точки, декартовы координаты которой меняются по закону: $x = p(t)$, $y = q(t)$. Из уравнений (2.15) видно, что функции $p(t)$ и $q(t)$ изменяются по гармоническому закону, если Ω – постоянная. Тогда траектория точки на плоскости является фигурой Лиссажу. В [4] показано, что характер волнового процесса (2.16) влияет на форму фигуры Лиссажу. Если (2.16) представляет собой чисто стоячую волну, то фигура Лиссажу является отрезком прямой (рис. 2.6, а), если же колебательный процесс на кромке резонатора является чисто бегущей волной, то фигура Лиссажу является окружностью (рис. 2.6, б). В случае, если (2.16) является стоячей волной, возбужденной во вращающемся резонаторе, фигурой Лиссажу является эллипс, главные оси которого меняют ориентацию относительно системы координат, причем угол наклона одной из главных осей этого эллипса к оси Ox равен 2ϑ , где ϑ – угол текущей ориентации пучности стоячей волны относительно резонатора (рис. 2.6, в).

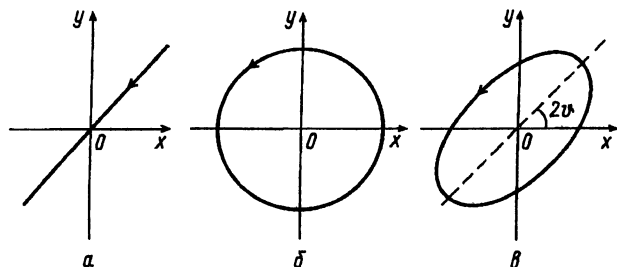


Рис. 2.6. Фигуры Лиссажу

Последний случай представляет наибольший интерес при исследовании колебаний резонатора ВТГ, поэтому рассмотрим его более подробно, применяя систему уравнений (2.15).

Умножим первое уравнение (2.15) на i и сложим со вторым, вводя комплексную функцию $z(t) = p(t) + iq(t)$:

$$\ddot{z} + 2i\Omega\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (2.17)$$

где $\alpha = b/m_0$; $\omega_0 = \sqrt{c_0/m_0}$ – собственная частота колебаний резонатора.

Общее решение уравнения (2.17) запишем в виде

$$z(t) = e^{-i\alpha\Omega t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}), \quad (2.18)$$

где C_1 и C_2 – комплексные числа, определяемые начальными условиями.

Решение (2.18) показывает, что радиус-вектор точки z на комплексной плоскости вращается с угловой скоростью, равной 2Ω , в сторону, противоположную вращению резонатора. Это значит, что стоячая волна медленно меняет ориентацию в теле резонатора с угловой скоростью $\dot{\vartheta} = -K\Omega$, где коэффициент K выражается формулой

$$K = \frac{b}{2m_0} = \frac{\int_0^{\pi/2} VW \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \theta d\theta}. \quad (2.19)$$

Вычисление по формуле (2.19) дает результат: $K = 0,311$. Угловая скорость вращения (прецессии) стоячей волны равна:

$$\dot{\vartheta} = -0,311\Omega. \quad (2.20)$$

Величина K называется масштабным коэффициентом резонатора, и в рамках гипотезы Кирхгофа – Лява его зависимость от параметров резонатора не обнаруживается.

В литературе указывается, что аналогом прецессии стоячей волны в резонаторе ВТГ является движение маятника Фуко [19]*. Рассмотрим другой аналог, имеющий совершенно иной физический принцип: маленький шарик массой m ,

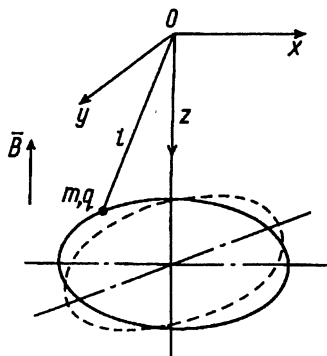


Рис. 2.7. Маятник в магнитном поле

обладающий зарядом q , подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l , помещен в сильное однородное магнитное поле, вектор индукции которого равен \vec{B} и направлен вертикально вверх (рис. 2.7). Считая, что маятник движется практически в горизонтальной плоскости, напишем уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 x = 0; \\ \ddot{y} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 y = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

где x, y – координаты проекции шарика на плоскость Oxy ; $\beta = qB/(2m)$; $\omega_0 = \sqrt{g/l}$; g – ускорение свободного падения.

Вводя комплексную величину $z = x + iy$, получаем уравнение

$$\ddot{z} + 2i\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Его решение запишем в виде

$$Z(t) = e^{-i\beta t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}),$$

где C_1 и C_2 – комплексные числа, определяемые начальными условиями.

* Наиболее полно исследование маятника Фуко проведено в работе: Журавлев В.Ф. Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Известия РАН. МТТ. 1997. № 6.

Сравнивая полученное решение с решением (2.18), приходим к выводу, что траектория колебаний маятника меняет ориентацию с угловой скоростью, равной $qB/(2m)$, аналогично вращению волнового поля резонатора ВТГ. Аналогом прецессии стоячей волны в резонаторе является также задача трех тел в небесной механике.

2.2. Кольцевая модель резонатора ВТГ

В этом параграфе рассмотрена кольцевая модель [10] резонатора ВТГ, которая применяется наряду с полусферической. Кольцевая модель – это тонкое упругое кольцо, совершающее колебательное движение в своей плоскости (рис. 2.8).

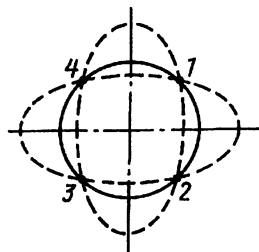


Рис. 2.8. Движение кольцевого резонатора:

1 – 4 – узловые точки

Уравнение движения такого кольца под действием внешней распределенной нагрузки имеет вид (см. приложение 1)

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \varkappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \varkappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = (p_w'' - p_v')/(\rho S), \quad (2.22)$$

где $\varkappa^2 = EI/(\rho SR^4)$; ρ – плотность материала кольца; S – площадь поперечного сечения кольца; I – момент инерции поперечного сечения относительно оси изгиба; R – радиус недеформированного кольца; $w(\varphi, t)$ – нормальное перемещение точки кольца в произвольный момент времени; p_w , p_v – проекции внешней распределенной нагрузки на нормаль

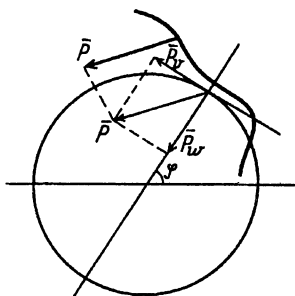


Рис. 2.9. Силовые факторы резонатора

и касательную к недеформированному кольцу соответственно (рис. 2.9); ξ – коэффициент, характеризующий время затухания свободных колебаний. В (2.22) точка обозначает производную по времени t , штрих – производную по углу φ . Покажем, что уравнение (2.22) отражает основное свойство стоячей волны, возбужденной в

резонаторе ВТГ, – прецессию волнового поля при вращении кольца с угловой скоростью Ω в своей плоскости в случае, когда $\xi = 0$, $p_w = p_v = 0$, т.е. в случае идеального свободного кольца.

Решение уравнения (2.22) представим в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (2.23)$$

Подставляя (2.23) в (2.22) и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) - \frac{8}{5} \Omega \dot{q}(t) + \frac{36\alpha^2}{5} p(t) = 0; \\ \ddot{q}(t) + \frac{8}{5} \Omega \dot{p}(t) + \frac{36\alpha^2}{5} q(t) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что скорость прецессии основной формы колебаний кольцевого резонатора определяется выражением $\dot{\varphi} = -0,4\Omega$.

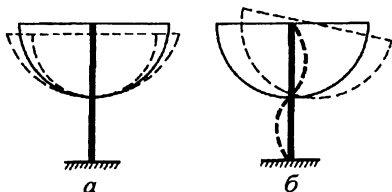
Для основной формы колебаний $n = 2$ значение масштабного коэффициента кольцевого резонатора $K = 0,4$.

Уравнение (2.22), как и уравнения (2.12), отражает основное свойство стоячей волны.

Сравнивая системы (2.15) и (2.24), видим, что по своей структуре они ничем не отличаются. Поведение стоячей волны при различных внешних нагрузках удобнее рассматривать, применяя уравнение (2.22).

Рис. 2.10. Движение резонатора с учетом неидеальности ножки (неплоские движения резонатора):

а – сжатие (растяжение) ножки;
б – изгиб ножки



Кольцевая модель обладает рядом недостатков: сильное искажение масштабного коэффициента K ; наличие момента инерции I в уравнении модели, который не определен для полусферического резонатора; неспособность учитывать движения резонатора, выходящие за пределы плоскости кромки, например, продольные вибрации, сжатие (растяжение) или изгибные колебания ножки (рис. 2.10). Поэтому при исследовании названных выше вопросов целесообразно применять полусферическую модель.

Таблица 2.1

Значения масштабного коэффициента ВТГ

Источник информации	K
С.А. Сарапулов [19]	0,311
Н.Е. Егармин [5]	0,289
В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов [10]:	
кольцо	0,4
оболочка	0,312
Экспериментальный результат [30]	0,281
Экспериментальный результат (АО РПКБ)	0,295

В табл. 2.1 приведены значения масштабного коэффициента K , полученные различными авторами, а также результаты экспериментальных испытаний ВТГ.

2.3. Позиционное возбуждение колебаний резонатора ВТГ

Принцип и особенности работы системы позиционного возбуждения резонатора ВТГ удобно рассмотреть на основе кольцевой модели.

В качестве рабочей формы колебаний в ВТГ используется вторая форма, имеющая четыре узла и четыре пучности. Рассмотрим возникновение рабочей (основной) формы колебаний.

Схема позиционного возбуждения показана на рис. 2.11. На пару противоположных электродов подается переменное электрическое напряжение с частотой, в 2 раза меньшей, чем собственная частота основной формы:

$$V(\varphi, t) = \begin{cases} 0, & 0,5\varphi_{\text{эл}} < \varphi < \pi - 0,5\varphi_{\text{эл}}; \\ V_0 \cos \frac{\lambda}{2} t, & 0 \leq \varphi < 0,5\varphi_{\text{эл}}; \\ & \pi - 0,5\varphi_{\text{эл}} < \varphi < \pi + 0,5\varphi_{\text{эл}}, \end{cases} \quad (2.25)$$

где V_0 – амплитуда напряжения; $\varphi_{\text{эл}}$ – угловой размер электрода; λ – собственная частота. График функции $V(\varphi, 0)$ показан на рис. 2.12.

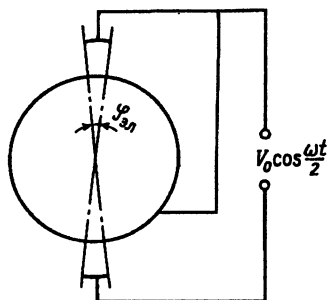


Рис. 2.11. Схема позиционного возбуждения резонатора двумя электродами

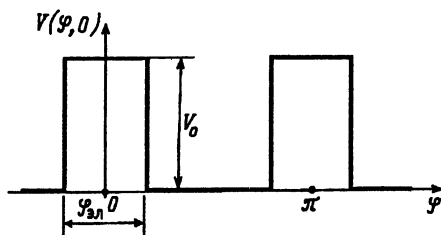


Рис. 2.12. Распределение напряжения по углу φ

Поверхности резонатора и электродов покрыты тонким электропроводящим слоем, поэтому в какой-то степени они являются обкладками цилиндрического конденсатора. Однако при расчетах можно с хорошей точностью рассматривать такой конденсатор как плоский [10].

Обкладки любого заряженного конденсатора притягиваются, поэтому со стороны электродов на резонатор действуют силы электрического притяжения.

Сила притяжения обкладок плоского конденсатора, отнесенная к площади обкладки, определяется выражением [14]

$$p = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2, \quad (2.26)$$

где V – разность потенциалов между обкладками; d – расстояние между ними; $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная. Знак минус указывает на то, что это всегда сила притяжения.

Найдем движение резонатора под действием сил позиционного возбуждения. Ввиду малости деформаций будем считать, что $p_v = 0$ в рамках линейной модели. Уравнение движения кольцевой модели:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \varkappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \varkappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = p_w''/(\rho S). \quad (2.27)$$

Нормальную составляющую внешней нагрузки найдем, подставив разность потенциалов (2.25) в (2.26):

$$p_w(\varphi, t) = -\frac{\varepsilon_0 L}{2d^2} V_0^2 f(\varphi) \cos^2 \frac{\lambda}{2} t,$$

где $f(\varphi) = \begin{cases} 0, & 0,5\varphi_{эл} < \varphi < \pi - 0,5\varphi_{эл}; \\ 1, & 0 \leq \varphi \leq 0,5\varphi_{эл}; \end{cases}$ L – высота электрода.

Отметим, что функция $f(\varphi)$ имеет период, равный π .

Далее представим функцию $f(\varphi)$ на отрезке $[0, \pi]$ рядом Фурье:

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \left(\varphi_{\text{эл}} + \sin \varphi_{\text{эл}} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_{\text{эл}} \cos 4\varphi + \dots \right).$$

Поскольку нас интересует движение основной формы, то в спектре возбуждающей силы оставим лишь вторую гармо-

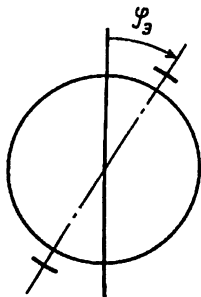


Рис. 2.13. Ориентация электродов возбуждения

нику окружного угла. Все остальные гармоники можно отбросить, так как они не являются резонансными для основной формы.

Допустим, что пара возбуждающих электродов ориентирована под углом $\varphi = \varphi_3$ (где φ_3 — ориентация первого электрода), характеризующим положение электродов относительно корпуса (рис. 2.13).

Тогда выражение для второй гармоники внешней силы запишется в виде

$$p_w(\varphi, t) = -\frac{\varepsilon_0 V_0^2 L}{\pi d^2} \sin \varphi_{\text{эл}} \cos 2(\varphi - \varphi_3) \cos \lambda t, \quad (2.28)$$

где d — зазор между электродом и резонатором. Здесь не учитывается постоянная нагрузка. В общем случае d определяется следующим образом:

$$d = d_0 + w(\varphi, t),$$

где d_0 — начальный зазор.

Найдем вторую производную выражения (2.28) по углу φ :

$$p_w'' = \frac{2\varepsilon_0 V_0^2 L \sin \varphi_{\text{эл}}}{\pi d_0^2} \cos 2(\varphi - \varphi_3) \cos \lambda t. \quad (2.29)$$

Отметим, что (2.29) получено с помощью разложения (2.28) по степеням величины w и отбрасывания величин второго порядка малости и постоянной составляющей, дающей небольшое статическое смещение резонатора, которым можно пренебречь при анализе принципиальной схемы.

Подставляя (2.29) в (2.27), приходим к уравнению

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') + \varkappa^2\xi(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') = H \cos 2(\varphi - \varphi_3) \cos \lambda t, \quad (2.30)$$

где $H = 2\varepsilon_0 V_0^2 L \sin \varphi_{\text{эл}} / (\pi d_0^2 \rho S)$.

Решение уравнения (2.30) представим в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (2.31)$$

Подставляя (2.31) в (2.30) и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) + \omega^2 \xi \dot{p}(t) + \omega^2 p(t) - \frac{8}{5} \Omega \dot{q}(t) = -\frac{1}{5} H \cos 2\varphi_3 \cos \lambda t; \\ \ddot{q}(t) + \omega^2 \xi \dot{q}(t) + \omega^2 q(t) + \frac{8}{5} \Omega \dot{p}(t) = -\frac{1}{5} H \sin 2\varphi_3 \cos \lambda t. \end{cases} \quad (2.32)$$

Отметим, что в системе (2.32) выполнено условие резонанса: $\lambda = \omega_0$.

Функции $p(t)$ и $q(t)$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} p(t) &= a \cos \lambda t + m \sin \lambda t; \\ q(t) &= a \cos \lambda t + n \sin \lambda t. \end{aligned}$$

Тогда для определения величин a, m, b, n имеем систему уравнений

$$\begin{cases} m\omega_0^2\xi - \frac{8}{5}\Omega\omega_0 n = -\frac{1}{5}H \cos 2\varphi_3; \\ n\omega_0^2\xi + \frac{8}{5}\Omega\omega_0 a = \frac{1}{5}H \sin 2\varphi_3; \\ a = b = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Выражение для перемещения кромки резонатора можно привести к следующей форме:

$$w(\varphi, t) = \sin \omega_0 t (m \cos 2\varphi + n \sin 2\varphi).$$

Производя элементарные преобразования, получаем

$$w(\varphi, t) = \sqrt{m^2 + n^2} \sin \omega_0 t \cos 2(\varphi - \vartheta), \quad (2.34)$$

где $\operatorname{tg} 2\vartheta = n/m$.

Из (2.33) находим значения n и m , после подстановки в выражение (2.34) получаем формулу, определяющую угол ориентации стоячей волны в условиях позиционного возбуждения:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \operatorname{tg} 2\varphi_3 - \frac{8}{5} \frac{\Omega}{\omega_0^2 \xi} (1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi_3) + \frac{64}{25} \frac{\Omega^2}{\omega_0^4 \xi^2} \operatorname{tg} 2\varphi_3. \quad (2.35)$$

Анализ выражения (2.35) показывает, что:

при $\Omega = 0$ ориентация волнового поля в резонаторе ВТГ постоянна и определяется ориентацией электродов позиционного возбуждения $\vartheta = \varphi_3$, другими словами, стоячая волна “привязана” к корпусу прибора (рис. 2.14, а);

при $\Omega \neq 0$ (с учетом малости Ω^2) пучность стоячей волны отстает от направления возбуждения на угол ψ , определяемый величиной угловой скорости, собственной частотой и затуханием: $\vartheta = \varphi_3 - \psi$, где $\psi = 2K \frac{\Omega}{\omega_0^2 \xi}$ (рис. 2.14, б).

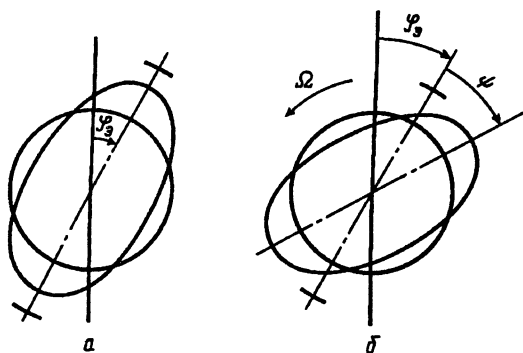


Рис. 2.14. Поведение стоячей волны:

а – неподвижное основание; б – вращающееся основание

Так как угол отставания стоячей волны пропорционален входной угловой скорости, такой режим работы ВТГ является режимом датчика угловой скорости – ВТГ-ДУС.

Покажем принцип измерения угловой скорости. На внутренней поверхности резонатора установлены емкостные датчики Д1 и Д2 (рис. 2.15). При изменении зазора между поверхностями резонатора и датчика на поверхности датчика появляется избыток заряда, так как разность потенциалов между ней и резонатором неизменна.

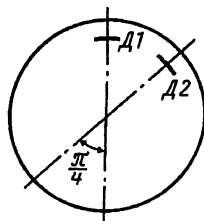


Рис. 2.15. К измерению угловой скорости в режиме ВТГ-ДУС

Количество заряда пропорционально изменению зазора, т.е. перемещению. Таким образом, сигнал емкостного датчика содержит информацию о перемещении кромки резонатора.

Датчики Д1 и Д2 ориентированы под углом 0° и 45° соответственно. Сигналы, поступающие с них, имеют вид:

датчик Д1: $w_1 = m \sin \lambda t$;

датчик Д2: $w_2 = n \sin \lambda t$.

Производя демодуляцию сигналов с опорным сигналом демодулятора $\sin \lambda t$, получаем

$$\frac{w_2^*}{w_1^*} = \operatorname{tg} 2\vartheta; \quad \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_2^*}{w_1^*},$$

где ϑ – ориентация пучности стоячей волны; w_1^* , w_2^* – сигналы после демодуляции.

Угловая скорость основания определяется формулой

$$\Omega = 0,5 K^{-1} \omega_0^2 \xi (\varphi_3 - \vartheta).$$

Отметим, что этот результат получен при условии, что угловая скорость постоянная. Если угловая скорость является функцией времени, то ВТГ также работает в режиме ДУС, это показано в работе [10] методом осреднения.

2.4. Параметрическое возбуждение колебаний резонатора ВТГ

Ниже рассмотрен принцип работы системы параметрического возбуждения колебаний резонатора ВТГ. Показано, что в этом случае ВТГ выполняет функцию интегратора угловой скорости или датчика угла поворота основания, на котором установлен гироскоп, т.е. ВТГ работает в режиме интегрирующего гироскопа (ВТГ-ИГ) или в режиме “свободного” гироскопа.

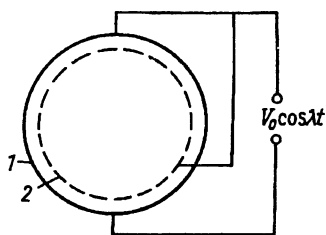


Рис. 2.16. Схема расположения кольцевого электрода:

1 – кольцевой электрод; 2 – резонатор

Параметрическое возбуждение осуществляется с помощью кольцевого электрода, окружающего кромку резонатора. Поверхности резонатора и кольцевого электрода можно рассматривать, как обкладки цилиндрического конденсатора, к которым приложено напряжение, не зависящее от угла φ , с частотой, близкой к собственной частоте резонатора (рис. 2.16):

$$V = V_0 \cos \lambda t.$$

Назначение системы параметрического возбуждения – компенсация энергетических потерь резонатора, определяемых главным образом внутренней диссипацией материала резонатора и влиянием остаточного газа в приборе. Система позиционного возбуждения для этой цели не подходит, так как стоячая волна будет “затягиваться” к электродам возбуждения.

На рис. 2.17 показан процесс параметрического возбуждения. Когда резонатор не деформирован, электрические силы уравновешены внутренними напряжениями. Когда резонатор деформируется, то притягивающая сила в области

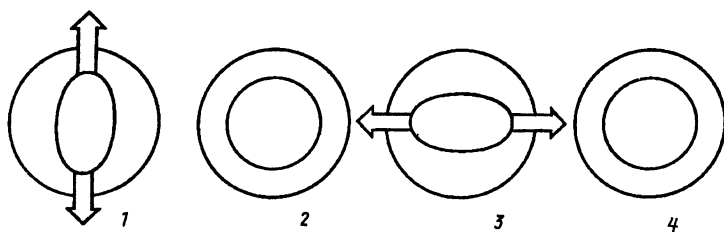


Рис. 2.17. Процесс параметрического возбуждения

меньшего зазора увеличивается, а сила в области большего зазора уменьшается, так как эта сила обратно пропорциональна квадрату величины зазора между кольцевым электродом и резонатором. Результирующая сила приводит к еще большей деформации резонатора и действует в направлении пучностей стоячей волны.

Четыре фрагмента рис. 2.17 иллюстрируют этот процесс. На фрагменте 1 резонатор движется в сторону максимальной деформации, напряжение питания включено. На фрагменте 2 резонатор по инерции возвращается в положение равновесия, при этом напряжение отключено. На фрагментах 3 и 4 этот порядок повторяется, но в противоположную сторону.

При изменении напряжения с частотой, равной собственной частоте резонатора по основной форме, происходит параметрическое возбуждение резонатора.

Для расчета примем, что касательная составляющая электрической силы, приложенной к резонатору, равна нулю, а нормальную разложим в ряд по степеням перемещения w с точностью до первого порядка:

$$p_w = -\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V^2}{(d_0 + w)^2} \approx \frac{\varepsilon_0 V^2 w}{d_0^3} + \dots,$$

где многоточие обозначает величины более высокого порядка малости, а также постоянную составляющую.

С учетом сказанного запишем уравнения динамики кольцевой модели резонатора в условиях параметрического возбуждения:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') + \varkappa^2\xi(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') = w'' R \cos^2 \lambda t, \quad (2.36)$$

где $R = \varepsilon_0 L V_0^2 / (\rho S d_0^3)$.

Решение уравнения (2.36) представим в форме

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36) и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) - \frac{8}{5} \Omega \dot{q}(t) + \omega_0^2 \xi \dot{p}(t) + \omega_0^2 p(t) = \frac{4R}{5} p(t) \cos^2 \lambda t; \\ \ddot{q}(t) + \frac{8}{5} \Omega \dot{p}(t) + \omega_0^2 \xi \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{4R}{5} q(t) \cos^2 \lambda t. \end{cases} \quad (2.38)$$

Пусть $\Omega = \Omega(t)$ – медленная функция времени, т.е. функция, скоростью изменения которой можно пренебречь. Введем медленные переменные $a(t)$, $m(t)$, $b(t)$, $n(t)$, согласно следующим условиям:

$$\begin{aligned} p(t) &= a(t) \cos \lambda t + m(t) \sin \lambda t; \\ q(t) &= b(t) \cos \lambda t + n(t) \sin \lambda t; \\ \dot{p}(t) &= -a(t)\lambda \sin \lambda t + m(t)\lambda \cos \lambda t; \\ \dot{q}(t) &= -b(t)\lambda \sin \lambda t + n(t)\lambda \cos \lambda t. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подставляя (2.39) в (2.38) и производя осреднение полученной системы по быстрой переменной λt [10], приходим к системе, описывающей эволюцию медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{m} = -\frac{1}{2} \left(\Delta + \frac{3}{2} s \right) a + \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi m - \frac{4}{5} \Omega n; \\ \dot{a} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi a + \frac{1}{2} \left(\Delta + \frac{1}{2} s \right) m - \frac{4}{5} \Omega b; \\ \dot{n} = \frac{4}{5} \Omega m - \frac{1}{2} \left(\Delta + \frac{3}{2} s \right) b + \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi n; \\ \dot{b} = \frac{4}{5} \Omega a + \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi b + \frac{1}{2} \left(\Delta + \frac{1}{2} s \right) n, \end{cases} \quad (2.40)$$

где $\Delta = (\lambda^2 - \omega_0^2)/\lambda$; $s = 2R/(5\lambda)$; λ близко к собственной частоте ω_0 .

Построим границу области устойчивости системы (2.40) при $\Omega = 0$.

Для существования ограниченных колебаний в системе (2.40) при $\Omega = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\det \begin{bmatrix} \Delta + \frac{3}{2} s & -\omega_0^2 \xi \\ \omega_0^2 \xi & \Delta + \frac{1}{2} s \end{bmatrix} = 0. \quad (2.41)$$

Условие (2.41) дает уравнение границы области устойчивости в плоскости параметров Δ и s :

$$\left(\Delta + \frac{3}{2} s \right) \left(\Delta + \frac{1}{2} s \right) + \omega_0^4 \xi = 0. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.42) определяет гиперболу (рис. 2.18), причем точка минимума имеет координаты:

$$\begin{aligned} \Delta_{\min} &= -2\omega_0^2 \xi; \\ s_{\min} &= 2\omega_0^2 \xi. \end{aligned} \quad (2.43)$$

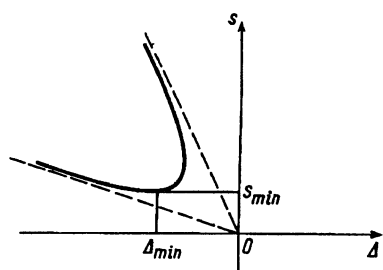


Рис. 2.18. Граница области устойчивости

Область внутри гиперболы соответствует неустойчивым колебаниям, область вне гиперболы — устойчивым колебаниям.

Рассмотрим случай режима возбуждения с частотой и амплитудой напряжения кольцевого электрода, соответствующими точке минимума (2.43):

$$\lambda_{\min} = -\omega_0^2 \xi + \omega_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 \xi^2};$$

$$V_{0\min}^2 = 5\rho S d_0^3 \omega_0^3 \xi \lambda_{\min} / (\varepsilon_0 L).$$

По отношению к амплитуде подаваемого напряжения этот режим является оптимальным.

Колебательный процесс, возбужденный в резонаторе, запишем в следующем виде:

$$w(\varphi, t) = (a \cos \lambda t + m \sin \lambda t) \cos 2\varphi + (b \cos \lambda t + n \sin \lambda t) \sin 2\varphi. \quad (2.44)$$

В работе [5] показано, что (2.44) будет представлять собой стоячую волну при выполнении условия

$$\det \begin{bmatrix} a & m \\ b & n \end{bmatrix} = 0. \quad (2.45)$$

Запишем систему (2.40), теперь при $\Omega \neq 0$, при условии (2.43):

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (a - m) - \frac{4}{5} \Omega b; \\ \dot{m} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (m - a) - \frac{4}{5} \Omega m; \\ \dot{b} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (b - n) + \frac{4}{5} \Omega a; \\ \dot{n} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (n - b) + \frac{4}{5} \Omega n. \end{cases} \quad (2.46)$$

Далее в силу (2.45) решение (2.44) преобразуется к виду

$$w(\varphi, t) = \sqrt{a^2 + m^2 + b^2 + n^2} \cos(\lambda t - \alpha) \cos 2(\varphi - \vartheta), \quad (2.47)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = m/a$; $\operatorname{tg} 2\vartheta = \sqrt{b^2 + n^2} / \sqrt{a^2 + m^2}$.

Угол ϑ определяет ориентацию стоячей волны (2.47) относительно резонатора. Для нахождения эволюции этого угла имеем соотношение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + m^2}} \right].$$

Вычисляя производную и пользуясь уравнениями системы (2.46), получаем

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2}{5} \Omega + 4\omega^2 \xi [m^2 b^2 - n^2 a^2 + 2(b^2 + n^2) am - 2(a^2 + m^2) bn].$$

Выражение в квадратных скобках равно нулю, поэтому

$$\dot{\vartheta} = -K\Omega,$$

или

$$\vartheta = \vartheta_0 - K \int_0^t \Omega(\tau) d\tau,$$

где $K = 0,4$ – масштабный коэффициент.

Из последней формулы следует, что угол поворота стоячей волны пропорционален углу поворота корпуса ВТГ, т.е. в режиме параметрического возбуждения ВТГ является интегрирующим (ВТГ-ИГ).

В приборе функционирует множество систем управления: система стабилизации амплитуды, система фазовой автоподстройки частоты, система подавления квадратурной волны. В работе [22] показано, что все названные системы не влияют на интегрирующее свойство ВТГ.

Угол ϑ находится с помощью демодуляции с опорным сигналом из формулы (2.47). Сигналы с датчиков Д1 и Д2 имеют вид:

$$\text{датчик Д1: } w_1 = A \cos(\lambda t - \alpha) \cos 2\vartheta;$$

$$\text{датчик Д2: } w_2 = A \cos(\lambda t - \alpha) \sin 2\vartheta,$$

где $A = \sqrt{a^2 + m^2 + b^2 + n^2}$.

После проведения демодуляции сигналы преобразуются следующим образом:

$$w_1^* = A \cos \alpha \cos 2\vartheta;$$

$$w_2^* = A \cos \alpha \sin 2\vartheta.$$

Отсюда находим, что $\operatorname{tg} 2\vartheta = w_2^*/w_1^*$.

Угол поворота основания равен:

$$\Delta\psi = 0,5K^{-1} \operatorname{arctg}(w_2^*/w_1^*).$$

2.5. Система съема информации ВТГ

Система съема информации ВТГ состоит из восьми датчиков линейных перемещений, которые размещаются на внутреннем корпусе прибора [13].

Каждый электрод электрически соединен с диаметрально противоположным электродом. Сигналы, поступающие с датчиков 0° , 90° , 180° , 270° (рис. 2.19, а), электрически складываются и образуют так называемый косинусный канал информации E_c . Аналогично сложение сигналов с датчиков 45° , 135° , 225° , 315° определяет синусный канал информации E_s . Сигналы E_c и E_s изменяются с частотой собственных колебаний резонатора (около 2500 Гц) и амплитудой, пропорциональной составляющим амплитуд колебаний вдоль осей Ox , Oy и Ox_1 , Oy_1 (рис. 2.19, б).

Целью обработки сигналов E_c и E_s является определение соотношения амплитуд для нахождения угла ϑ поворота стоячей волны относительно резонатора.

Сигналы E_c и E_s усиливаются, затем с помощью демодуляторов выделяются их составляющие, которые находятся

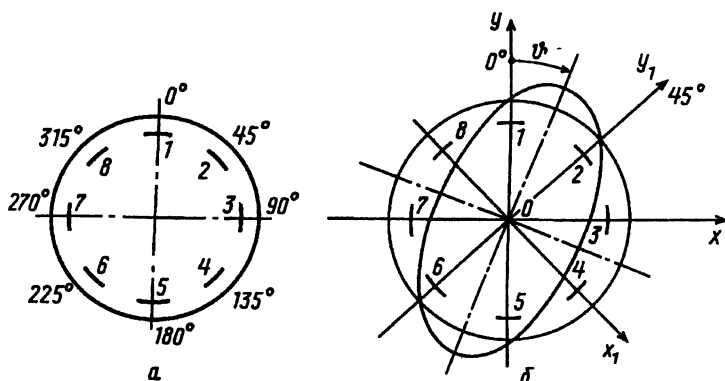


Рис. 2.19. Расположение датчиков съема сигналов:
 а – неподвижное основание, $\psi = 0$; б – $\psi \neq 0$; 1 – 8 – датчики Д1 – Д8 соответственно

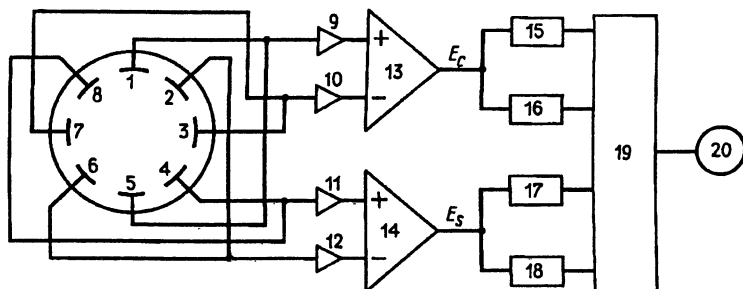


Рис. 2.20. Схема преобразования сигналов датчиков Д1 – Д8 для вычисления угла поворота основания ВТГ:

1 – 8 – емкостные датчики; 9, 10, 11, 12 – предварительные усилители каналов E_c и E_s ; 13, 14 – операционные усилители; 15, 17 – фазные демодуляторы сигналов E_c и E_s ; 16, 18 – квадратурные демодуляторы сигналов E_c и E_s ; 19 – АЦП (аналого-цифровой преобразователь); 20 – ЭВМ

в фазе с опорным сигналом демодуляторов $\cos \lambda t$ (λ – частота напряжения питания кольцевого электрода). Далее эти составляющие преобразуются в электронные коды, которые поступают на ЭВМ, где вычисляется угол ψ (формулы приведены в п. 2.4).

Принципиальная схема преобразования сигналов показана на рис. 2.20.

Рассмотрим способ съема информации с помощью емкостных датчиков линейных перемещений, которая характеризует положение стоячей волны (см. рис. 2.19, б). Такая система эквивалентна датчику углового положения волновой картины, поэтому воспользуемся традиционным термином “датчик угла” ВТГ.

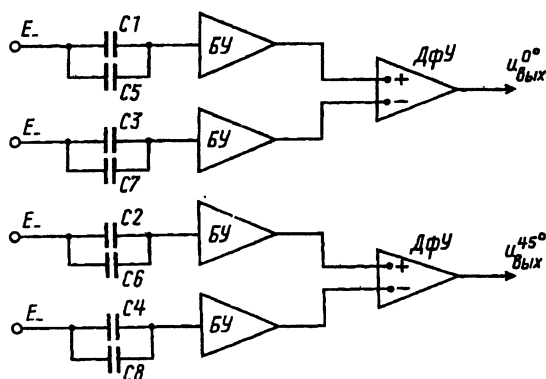


Рис. 2.21. Система съема информации с датчиков ВТГ:

E – питающее постоянное напряжение; $C1 - C8$ – рабочие емкости датчика угла; БУ – буферный усилитель; ДФУ – дифференциальный усилитель

Система съема информации ВТГ состоит из восьми емкостных датчиков перемещений Д1 – Д8 и усилительно-преобразующих блоков (рис. 2.21). Емкостный датчик образуется двумя “обкладками” – напыляемыми пленками, одна из которых расположена сектором на электроде (рис. 2.22, а) корпуса прибора, другая образуется металлизированной поверхностью резонатора. На рис. 2.21 рабочие емкости датчика угла Д1 – Д8 обозначены как $C1 - C8$. Расстояние (зазор d) между обкладками конденсатора, т.е. расстояние между поверхностями электрода и резонатора, не превышает сотен микрон. Секторы датчика угла (ДУ) электрода соединены с буферными усилителями БУ, образуя дифференциальную систему съема сигнала: каналы Д1 – Д5, Д3 – Д7

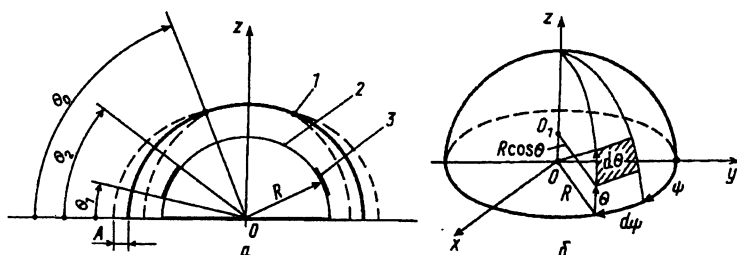


Рис. 2.22. Принцип измерений перемещений резонатора:
 а – изменение формы резонатора; б – расчетная схема резонатора;
 1 – резонатор; 2 – корпус; 3 – электрод

и т.д. С изменением зазора между электродами ДУ и резонатором на выходе каналов появляются сигналы, пропорциональные параметрам колебаний резонатора вдоль осей $Oy(0^\circ)$ и $Oy_1(45^\circ)$ (см. рис. 2.19, б), которые характеризуют положение диаграммы вибраций возбужденного резонатора относительно корпуса прибора.

Определим выражение изменения емкости ДУ при изменении начального зазора d_0 между резонатором и электродом при возбуждении резонатора.

Элементарную емкость при неподвижном резонаторе можно определить как емкость плоского конденсатора [14]:

$$dC_0 = \epsilon_0 \epsilon d_0^{-1} dS,$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – диэлектрическая постоянная; ϵ – диэлектрическая проницаемость; $dS = R^2 \cos \theta d\theta d\psi$ – элементарная площадь сферической поверхности (рис. 2.22, б).

Номинальная емкость по измерительному каналу $Oy(0^\circ)$ составит

$$C_0 = 2\epsilon_0 \epsilon R^2 d_0^{-1} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \psi.$$

При возбуждении резонатора происходит изменение зазора ДУ, так как для оси Oy имеем $d = d_0 + w$, где w – радиальный прогиб кромки резонатора.

Выражение для прогиба резонатора в меридиональном направлении (изменением зазора в окружном направлении при $w \ll d_0$ пренебрегаем) будет

$$w = A(1 - \theta\theta_0^{-1}) \cos 2\vartheta \sin \lambda_0 t,$$

где A – амплитуда колебаний кромки резонатора (см. рис. 2.22, а); θ – текущее значение угла; ϑ – угол, определяющий положение диаграммы вибрации в окружном направлении (см. рис. 2.19, а); λ_0 – собственная частота колебаний резонатора. Тогда выражение рабочей емкости с точностью до второго порядка малости по каналу Oy (0°) при $2\vartheta = 0$ (т.е. диаграмма вибрации направлена по оси Oy) имеет вид

$$C_y = 2\varepsilon_0 \varepsilon R^2 \int_{-\psi/2}^{\psi/2} d\psi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta d\theta}{d_0 + w} \approx \\ \approx C_0 [1 - Ba \sin \lambda_0 t + Da^2 (1 - \cos 2\lambda_0 t)],$$

где

$$B = \left\{ 1 - [\theta_0 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]^{-1} \right\} \times \\ \times (\cos \theta_2 - \cos \theta_1 + \theta_2 \sin \theta_2 - \theta_1 \sin \theta_1);$$

$$D = 0,5 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^{-1} \left\{ \sin \theta_2 - \sin \theta_1 - 2\theta_0^{-1} (\cos \theta_2 - \right. \\ \left. - \cos \theta_1 + \theta_2 \sin \theta_2 - \theta_1 \sin \theta_1) - \theta_0^{-2} \left[2(\theta_2 \cos \theta_2 - \theta_1 \cos \theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\theta_2^2 - 2) \sin \theta_2 - (\theta_1^2 - 2) \sin \theta_1 \right] \right\};$$

$a = A/d_0$ – относительная амплитуда колебаний кромки резонатора.

Аналогичные преобразования проведем для измерительного канала Ox , которому соответствует изменение зазора $d = d_0 - w$:

$$C_x = C_0 [1 + Ba \sin \lambda_0 t + Da^2 (1 - \cos 2\lambda_0 t)].$$

Изменение суммарной емкости ДУ при изменении рабочего зазора d в направлении оси Oy (0°) равно: $\Delta C_0 = C_x - C_y = 2C_0 Ba \sin \lambda_0 t$, т.е. пропорционально амплитуде колебаний резонатора.

Нелинейность выходной характеристики ДУ, включенных по дифференциальной схеме (рис. 2.23), не превышает сотых долей процента.

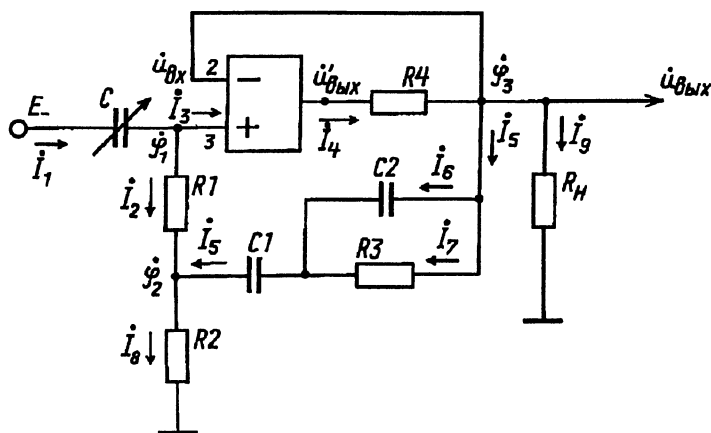


Рис. 2.23. Схема буферного усилителя

С целью защиты от помех емкостные датчики конструктивно выполняют совместно с буферными усилителями, согласующими высокоомный выход ДУ с низкоомной нагрузкой. Монтажные схемы устройств, включая схему буферного усилителя (см. рис. 2.23), тщательно экранируют. Входное сопротивление буферного усилителя составляет примерно несколько гектоом, а паразитная емкость не превышает долей пикофарады [13], что гарантирует высокую точность преобразования амплитуды и фазы колебаний резонатора в электрический сигнал. Запишем систему уравнений, характеризующую схему (см. рис. 2.23):

$$\begin{aligned}
\dot{E} - \dot{I}_1 x_C &= \dot{\varphi}_1 = \dot{u}_{\text{вх}}; \quad \dot{\varphi}_1 - \dot{I}_2 R_1 = \dot{\varphi}_2; \\
\dot{\varphi}_2 - \dot{I}_8 R_2 &= 0; \quad \Delta \dot{u}_{\text{вх}} K_{\text{yc}} = \dot{u}_{\text{вых}}; \\
\dot{u}'_{\text{вых}} - \dot{I}_4 R_4 &= \dot{\varphi}_3 = \dot{u}_{\text{вых}}; \\
\dot{\varphi}_3 - \dot{I}_5 \left(x_{C_1} + \frac{R_3 x_{C_1}}{R_3 + x_{C_2}} \right) &= \dot{\varphi}_2; \\
\dot{I}_1 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_5 + \dot{I}_9 = \dot{I}_5 + \dot{\varphi}_3 / R_4; \\
\dot{I}_8 &= \dot{I}_2 + \dot{I}_5,
\end{aligned}$$

где E – постоянное напряжение ДУ; C – рабочая емкость; x_{C_1} , x_{C_2} – сопротивление нагрузки буферного усилителя.

Входное напряжение и ток операционного усилителя $\Delta \dot{u}_{\text{вх}} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3$; $\dot{I}_3 = \dot{\varphi}_1 / z_{\text{вх.м}}$, где $z_{\text{вх.м}}$ – собственное входное сопротивление операционного усилителя (микросхемы).

Тогда исходная система уравнений для буферного усилителя примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2 x_C + \left(1 + \frac{x_C}{z_{\text{вх.м}}} \right) \dot{\varphi}_1 &= E; \\
\dot{I}_2 (R_1 + R_2) + \dot{I}_5 R_2 - \dot{\varphi}_1 &= 0; \\
\dot{I}_2 R_2 + (Z + R_2) \dot{I}_5 - \dot{\varphi}_3 &= 0; \\
-\dot{I}_5 R_4 + K_{\text{yc}} \dot{\varphi}_1 - R_{\text{н}}^* \dot{\varphi}_3 &= 0,
\end{aligned}$$

$$\text{где } Z = x_{C_1} + \frac{R_3 x_{C_2}}{R_3 + x_{C_2}}; \quad R_{\text{н}}^* = \frac{R_{\text{н}}(1 + K_{\text{yc}}) + R_4}{R_{\text{н}}}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{I}_2 &= E \Delta^{-1} [-R_4 - (Z + R_2) R_{\text{н}}^* + R_2 K_{\text{yc}}]; \\
\dot{\varphi}_1 &= E \Delta^{-1} \left\{ [-(R_1 + R_2)(Z + R_2) + R_2^2] R_{\text{н}}^* - (R_1 + R_2) R_4 \right\}; \\
\dot{\varphi}_3 &= -E \Delta^{-1} [(R_1 + R_2)(Z + R_2) K_{\text{yc}} + R_2(R_4 - R_2 K_{\text{yc}})],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= x_C \left\{ [-R_4 - (Z + R_2) R_{\text{н}}^* + R_2 K_{\text{yc}} + z_{\text{вх.м}}^{-1} (-(R_1 + R_2) \times \right. \\
&\quad \times (Z + R_2) + R_2^2) R_{\text{н}}^* - (R_1 + R_2) R_4] \left. \right\} + \left\{ [-(R_1 + R_2) \times \right. \\
&\quad \times (Z + R_2) + R_2^2] R_{\text{н}}^* - (R_1 + R_2) R_4 \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Внутреннее сопротивление операционного усилителя, включенного по схеме (см. рис. 2.23), составляет $z_{вх,уc} = z_{вх,м} K_{уc} = 2 \cdot 10^7 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^{11}$ Ом.

Комплексное входное сопротивление буферного усилителя определим из следующей формулы:

$$Z_{вх} = \frac{\dot{\varphi}_1}{I_2} = \frac{E \left[(R_1 + R_2)(Z + R_2) + R_2^2 \right] R_H - (R_1 + R_2) R_4}{-R_4 - (Z + R_2) R_H^* + R_2 K_{уc}}.$$

Для параметров схемы $R_1 = R_2 = 5,1 \cdot 10^6$ Ом; $R_3 = 2,15 \cdot 10^6$ Ом; $R_4 = 3 \cdot 10^3$ Ом; $C_1 = 10^{-3}$ Ф; $R_H^* = 10^4$ Ом; $C_2 = 22 \cdot 10^{-9}$ Ф получим $Z_{вх} = 10^9(1,3 \cdot 10^{-2} + 9,3i)$, т.е. усилитель имеет индуктивное входное сопротивление $\lambda_0 L = 9,3 \cdot 10^9$ Ом на рабочей частоте $\lambda_0 = 2,5 \cdot 10^3$ Гц, достигаемое за счет емкостной обратной связи. Такая схема позволяет выполнить требования по точности преобразования фазы в отличие от буферного усилителя, имеющего активное входное сопротивление.

Выразив x_C через параметры угла, найдем выражения для выходного сопротивления буферного усилителя (по осям Ox, Oy). Сигналы $\dot{u}_{вх}^{yc} = \dot{\varphi}_1^{yc}$; $\dot{u}_{вых}^{yc} = \dot{\varphi}_3^{yc}$ складываются на выходе дифференциального усилителя и образуют сигнал по каналу $Oy(0^\circ)$:

$$\dot{u}_{вых}^{0^\circ} = \frac{1,6E(9,3 + 12i)}{2,6 \cdot 10^4} a \left\{ 1 + \frac{9,3 + 12i}{2,6 \cdot 10^4} \times \right. \\ \left. \times \left[2a + 3a^2(1 - \cos 2\lambda_0 t) \right] \right\} \sin \lambda_0 t.$$

Модуль выходного напряжения

$$\dot{u}_{вых}^{0^\circ} = 1,6 \cdot 10^{-2} E a \left[1 + 1,6 \cdot 10^{-2} a(1 + 3a^2) \right].$$

Дифференцируя полученное выражение по A , получим крутизну характеристики измерительного канала:

$$K_{дy} = \frac{d\dot{u}^{0^\circ}}{dA} = 1,6 \cdot 10^{-2} \frac{E}{d_0} (1 + 3,2 \cdot 10^{-2} a + 14,4 \cdot 10^{-2} a^2).$$

Для $E = 100$ В, $d_0 = 200$ мкм найдем $K_{ДУ} = 32$ мВ/мкм при коэффициенте усиления измерительного канала, равном единице.

Нелинейность крутизны измерительного канала определяется как $\gamma = 62,5E^{-1}d_0(3,2a + 14,4a^2) \%$ и не превышает 0,03 % при $A = 4$ мкм.

Полученные выше выражения не учитывают влияние входной (паразитной) емкости буферного усилителя и “конструктивных” погрешностей ДУ (неравномерность зазора d_0 , неидентичность рабочих поверхностей электродов и т.д.). Указанные причины приведут к снижению $K_{ДУ}$ и увеличению нелинейности γ .

Индуктивное входное сопротивление буферного усилителя позволяет обеспечить заданную точность преобразования фазы колебаний резонатора. Наличие во входном сопротивлении усилителя активной составляющей, соединенной последовательно с индуктивностью, и паразитной емкости дает сдвиг по фазе выходного напряжения относительно преобразуемых колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = R_{\text{н}} x_{C_{\text{н}}} x_L^{-2} \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$$

для паразитной емкости $C_{\text{п}} = 0,2$ пФ.

С целью обеспечения независимости выходного напряжения буферного усилителя от частоты преобразуемых колебаний необходимо выполнить условие $\lambda_0^2 LC_{\text{п}} = 1,6 \cdot 10^{19} \gg 1$.

Для достижения требуемого порога чувствительности по углу $0,02'$ [13] следует снижать собственный шум измерительного канала за счет применения малошумящих элементов (транзисторов и др.) и экранирования схемы. Таким образом, рассмотренная выше схема съема информации ВТГ отвечает современным задачам проектирования гироскопов.

3. ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ РЕЗОНАТОРА, СИСТЕМ ВОЗБУЖДЕНИЯ И СЪЕМА ИНФОРМАЦИИ НА ТОЧНОСТЬ ВТГ

Обзор результатов исследований [4, 7, 17, 19, 30] показывает, что основной причиной погрешностей ВТГ являются технологические дефекты резонатора.

В этой главе исследована динамика ВТГ (в режимах позиционного и параметрического возбуждения), имеющего расщепление частоты по четвертой гармонике, получена формула для нахождения скорости ухода стоячей волны. Найдена величина расщепления частоты по второй гармонике дефекта резонатора. Анализируются погрешности резонатора, постоянная времени которого зависит от ориентации стоячей волны. Рассмотрено использование так называемых вибрационных погрешностей ВТГ для идентификации неоднородности распределения массы резонатора с целью проведения его балансировки. Выполнен анализ влияния на точность ВТГ четвертой гармоники некруглости кольцевого электрода, а также наличия постоянной составляющей и четвертой гармоники в спектре напряжения системы питания кольцевого электрода.

3.1. Представление колебаний резонатора ВТГ в виде суммы двух стоячих волн, ортогональных по окружному углу и фазе

Колебания резонатора по второй собственной форме в общем случае можно представить в следующем виде:

$$w(\varphi, t) = A \sin 2\varphi \sin \omega t + B \sin 2\varphi \cos \omega t + \\ + C \cos 2\varphi \sin \omega t + D \cos 2\varphi \cos \omega t. \quad (3.1)$$

В [5] показано, что волновой процесс (3.1) является стоячей волной при выполнении условия

$$\det P = 0, \quad (3.2)$$

где $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов.

В идеальном неподвижном резонаторе условие (3.2) всегда выполняется независимо от времени. В случае вращения ВТГ или дефектов резонатора ВТГ значения A, B, C, D будут зависеть от времени, поэтому условие (3.2) не выполняется и стоячая волна разрушается.

Допустим, что решение (3.1) – “почти” стоячая волна и условие (3.2) “почти” выполнено; запишем это в следующей форме:

$$\alpha = \frac{\det P}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \ll 1. \quad (3.3)$$

Введем обозначение: $I_2(P) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. Поставим задачу о разложении матрицы P в сумму

$$P = X + \alpha Y, \quad (3.4)$$

где X и Y – вырожденные матрицы.

Разложение (3.4) соответствует представлению колебаний (3.1) в виде суммы двух стоячих волн с матрицами X и Y .

Пусть стоячая волна с матрицей X является наилучшим приближением волны с матрицей P , если в разложении величины $I_2(P)$ по степеням α отсутствуют линейные члены:

$$I_2(P) = I_2(X) + O(\alpha^2). \quad (3.5)$$

В общем случае $I_2(P)$ выражается таким образом:

$$I_2(P) = I_2(X) + 2\alpha \operatorname{tr}(XY^T) + \alpha^2 I_2(Y). \quad (3.6)$$

Условие (3.5) выполнено, если имеет место соотношение

$$\operatorname{tr}(XY^T) = 0. \quad (3.7)$$

Далее, поскольку $\det X = \det Y = 0$, то существует матрица S , такая, что $Y = S^{-1}XS$. Если в качестве S взять матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

то соотношение (3.7) будет выполнено.

Взяв таким образом матрицу S , запишем разложение (3.4) в виде

$$P = X + \alpha S^{-1}XS. \quad (3.8)$$

Чтобы найти X , решим последнее матричное уравнение

$$X = \frac{P + \alpha SPS}{1 - \alpha^2}. \quad (3.9)$$

Ограничимся линейным приближением по α :

$$X = P + \alpha SPS. \quad (3.10)$$

Таким образом, зная решение P , находим α , определяем стоячую волну X , называемую основной волной, затем определяем стоячую волну Y , называемую дополнительной волной, по формуле

$$Y = -SXS.$$

Отметим важное свойство основной и дополнительной стоячих волн: если матрице X соответствует стоячая волна в форме

$$w_x = A \sin k(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega t + \psi),$$

то матрице Y соответствует волна, имеющая вид

$$w_y = A \cos k(\varphi - \varphi_0) \cos(\omega t + \psi),$$

другими словами, основная и дополнительная стоячие волны, соответствующие матрицам X и Y , ортогональны по окружному углу и фазе.

Заметим, что формула (3.10) дает значение матрицы X лишь в линейном приближении. Условие $\det X = 0$ не будет выполняться точно:

$$\det X = (1 + \alpha^2) \det P - \alpha I_2(P) = \alpha^2 \det P \ll \det P.$$

При исследовании колебательных процессов, связанных с уходом стоячей волны, будем находить нелинейное приближение матрицы X , решая уравнение (3.8).

3.2. Погрешности ВТГ, вызываемые четвертой и второй гармониками неоднородности распределения массы резонатора

В работе [8] показано, что наиболее существенное влияние на поведение стоячих волн в резонаторе ВТГ оказывает четвертая гармоника разложения Фурье неоднородностей таких параметров, как плотность, модуль Юнга, толщина оболочки. Наличие четвертой гармоники дефекта приводит к появлению в резонаторе системы двух собственных осей, развернутых между собой на 45° , таких, что собственные частоты колебаний резонатора вдоль каждой из этих осей достигают наибольшего и наименьшего значений (рис. 3.1). Разность максимальной и минимальной частот называется расщеплением собственной частоты:

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta.$$

Собственная ось, относительно которой собственная частота колебаний меньше, называется “тяжелой”; ось с большей собственной частотой называется “легкой”. Существует

еще одна терминология в отношении собственных осей: ось с большей собственной частотой носит название оси большей жесткости, соответственно вторая ось называется осью меньшей жесткости. Мы будем пользоваться как “массовой”, так и “жесткостной” терминологиями в зависимости от описания того или иного физического процесса.

Четвертая гармоника расщепления массы по кромке резонатора дает следующее значение расщепления частоты [19]:

$$\Delta = \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0,$$

где ω_0 – невозмущенная частота; ε – относительная величина дефекта по четвертой гармонике.

Определим скорость прецессии стоячей волны, возбужденной в свободном от внешних воздействий резонаторе с расщеплением частоты по четвертой гармонике дефекта массы. Пусть начальное распределение колебаний имеет вид

$$w(\varphi, t) = A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega t.$$

Угол φ_0 определяет ориентацию волны относительно тяжелой собственной оси (см. рис. 3.1).

С течением времени стоячая волна разрушится, и колебательный процесс в резонаторе можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с различными частотами:

$$w(\varphi, t) = A \cos 2\varphi \cos 2\varphi_0 \cos \omega_1 t + A \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (3.11)$$

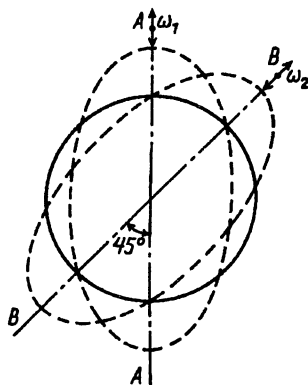


Рис. 3.1. Собственные оси колебаний:
 AA – “тяжелая”; BB – “легкая”; ω_1, ω_2 – собственные частоты колебаний резонатора

Согласно п. 3.1, волновой процесс (3.11) представим в виде суммы двух стоячих волн, ортогональных по окружному углу и по временной фазе.

Возьмем некоторую опорную частоту ω , такую, что $\omega_1 < \omega < \omega_2$, и введем две расстройки частот:

$$\Delta_1 = \omega - \omega_1;$$

$$\Delta_2 = \omega_2 - \omega.$$

Решение (3.11) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} w(\varphi, t) = & -A \sin 2\varphi_0 \sin \Delta_2 t \sin 2\varphi \sin \omega t + \\ & + A \sin 2\varphi_0 \cos \Delta_2 t \sin 2\varphi_0 \cos \omega t + A \cos 2\varphi_0 \sin \Delta_1 t \cos 2\varphi \sin \omega t + \\ & + A \cos 2\varphi_0 \cos \Delta_1 t \cos 2\varphi \cos \omega t. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Найдем определитель матрицы P , составленной для волны, представленной формулой (3.12):

$$\begin{aligned} \det P = & \begin{vmatrix} -A \sin 2\varphi_0 \sin \Delta_2 t & A \sin 2\varphi_0 \cos \Delta_2 t \\ A \cos 2\varphi_0 \sin \Delta_1 t & A \cos 2\varphi_0 \cos \Delta_1 t \end{vmatrix} = \\ & = -\frac{1}{2} A^2 \sin 4\varphi_0 \sin \Delta t. \end{aligned}$$

Анализируя полученное выражение, заключаем, что стоячие волны существуют только в двух случаях:

$\varphi_0 = 0, \pi/4$, т.е. начальная выставка диаграммы вибраций совпадает с ориентацией одной из собственных осей жесткости;

время t , на котором исследуется движение, удовлетворяет условию $\Delta t \ll 1$, в таком случае имеет смысл говорить о “квазистоячих” волнах в этом промежутке времени.

Следующий шаг – определение параметра α :

$$\alpha = \frac{\det P}{I_2(P)} = -\frac{1}{2} \sin 4\varphi_0 \sin \Delta t \approx -\frac{1}{2} \Delta t \sin 4\varphi_0.$$

Введем матрицу X основной стоячей волны в разложении (3.4):

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

далее, по формуле (3.10) найдем коэффициенты a, b, c, d :

$$\begin{aligned} a &= -A \sin 2\varphi_0 \sin \Delta_2 t - A\alpha \cos 2\varphi_0 \cos \Delta_1 t; \\ b &= A \sin 2\varphi_0 \cos \Delta_2 t + A\alpha \cos 2\varphi_0 \sin \Delta_1 t; \\ c &= A \cos 2\varphi_0 \sin \Delta_1 t + A\alpha \sin 2\varphi_0 \cos \Delta_2 t; \\ d &= A \cos 2\varphi_0 \cos \Delta_1 t + A\alpha \sin 2\varphi_0 \sin \Delta_2 t. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Основная стоячая волна, имеющая матрицу X , записывается следующим образом:

$$w_x(\varphi, t) = \sin 2\varphi(a \sin \omega t + b \cos \omega t) + \cos 2\varphi(c \sin \omega t + d \cos \omega t).$$

Подставляя в это выражение найденные коэффициенты (3.13), учитывая, что $\Delta_1 t \ll 1$ и $\Delta_2 t \ll 1$, а величина α имеет тот же порядок, что и величины Δ_1, Δ_2 , и удерживая лишь линейные по α слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} w_x(\varphi, t) &= -A \sin 2\varphi \sin \omega t (\Delta_2 t \sin 2\varphi_0 + \alpha \cos 2\varphi_0) + \\ &+ A \cos 2\varphi_0 \sin \omega t (\Delta_1 t \cos 2\varphi_0 + \alpha \sin 2\varphi_0) + \\ &+ A \sin 2\varphi \sin 2\varphi_0 \cos \omega t + A \cos 2\varphi \cos 2\varphi_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований запишем выражение в виде

$$\begin{aligned} w_x(\varphi, t) &= A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega t + \\ &+ At (\Delta_1 \cos^2 2\varphi_0 - \Delta_2 \sin^2 2\varphi_0) \cos 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

или

$$w_x(\varphi, t) = A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega^* t, \quad (3.15)$$

где $\omega^* = \omega_1 \cos^2 2\varphi_0 + \omega_2 \sin^2 2\varphi_0$.

После построения основной стоячей волны определим дополнительную стоячую волну:

$$w_y(\varphi, t) = A\alpha \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega^* t.$$

Итак, волновой процесс (3.11) записывается в форме

$$w(\varphi, t) = A \cos 2(\varphi - \varphi_0) \cos \omega^* t + A\alpha \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \omega^* t. \quad (3.16)$$

Чтобы выделить скорость ухода волны (3.16), под которой будем понимать скорость ухода основной стоячей волны, необходимо построить квадратичное приближение матрицы X по α .

Значение опорной частоты ω примем $\omega = \omega^*$, тогда из (3.15) следует:

$$\Delta_1 = \Delta \sin^2 2\varphi_0;$$

$$\Delta_2 = \Delta \cos^2 2\varphi_0.$$

В данном случае коэффициенты a и c в (3.13) имеют порядок α^3 и ими можно пренебречь в квадратичном приближении. Коэффициенты b и d разложим до величин второго порядка относительно α :

$$\begin{aligned} b &= A \sin 2\varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 (\cos^4 2\varphi_0 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 2\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0) \right]; \\ d &= A \cos 2\varphi_0 \left[1 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 (\sin^4 2\varphi_0 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sin^2 2\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Тогда основная стоячая волна в квадратичном приближении имеет вид

$$w_x(\varphi, t) = (b \sin 2\varphi + d \cos 2\varphi) \cos \omega^* t. \quad (3.18)$$

Преобразуем (3.18) следующим образом:

$$w_x(\varphi, t) = \sqrt{b^2 + d^2} \cos(2\varphi - \psi) \cos \omega^* t. \quad (3.19)$$

Величину $\sqrt{b^2 + d^2}$ и угол ψ в (3.19) находим с точностью до α^2 :

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 + d^2} &= \\ &= A \left(1 - \frac{3}{2} \Delta^2 t^2 \sin^2 2\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0 \right) = A \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \right); \\ \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{d} &= \\ &= \operatorname{tg} 2\varphi_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \operatorname{tg} 2\varphi_0 (\sin^4 2\varphi_0 - \cos^4 2\varphi_0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Представим угол ψ в виде суммы двух величин:

$$\psi = 2\varphi_0 + \delta,$$

тогда, разлагая $\operatorname{tg} \psi$ по степеням δ , получаем

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} 2\varphi_0 + \frac{1}{\cos^2 2\varphi_0} \delta + o(\delta).$$

Сравнивая последнее выражение для $\operatorname{tg} \psi$ с выражением (3.20), находим δ и ψ :

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{8} \Delta^2 t^2 \sin 8\varphi_0; \\ \psi &= 2\varphi_0 - \frac{1}{8} \Delta^2 t^2 \sin 8\varphi_0. \end{aligned}$$

Таким образом, основная стоячая волна в квадратичном приближении представляется в виде

$$w_x(\varphi, t) = A \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \right) \cos \left(2\varphi - 2\varphi_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 t^2 \sin 8\varphi_0 \right) \cos \omega^* t.$$

При настройке частоты опорного генератора на значение, равное ω^* , и демодуляции сигналов системы съема относительно опорного сигнала $\cos \omega^* t$ основная волна будет

восприниматься как стоячая, мгновенное положение пучности которой изменяется следующим образом:

$$\vartheta = \varphi_0 - \frac{1}{16}(\Delta t)^2 \sin 8\varphi_0. \quad (3.21)$$

Скорость прецессии стоячей волны относительно резонатора определяется выражением

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{8}\Delta^2 t \sin 8\varphi_0 \quad (3.22)$$

и является скоростью ухода ВТГ вследствие расщепления Δ собственной частоты по четвертой гармонике неоднородности распределения массы резонатора.

При этом дополнительная стоячая волна $w_y(\varphi, t)$, называемая квадратурной, не будет восприниматься системой съема, поскольку она ортогональна основной стоячей волне по временной фазе.

Следует отметить, что формула (3.22) зависит от выбора опорной частоты ω^* : $\omega^* = \omega_1 \cos^2 2\varphi_0 + \omega_2 \sin^2 2\varphi_0$.

На основании (3.22) заключаем, что для компенсации скорости ухода ВТГ необходимо проводить балансировку резонатора по четвертой гармонике дефекта с целью уменьшения величины Δ расщепления собственной частоты.

Оценим расщепление собственной частоты, даваемое второй гармоникой дефекта плотности:

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon_2 \cos 2\varphi). \quad (3.23)$$

Уравнение движения свободного резонатора возьмем в форме, учитывающей переменную плотность [10]:

$$\left[\frac{(\rho \ddot{w})'}{\rho} \right]' - \ddot{w} + \frac{EI}{\rho S R^4} (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') - \\ - \frac{EI\rho'}{\rho^2 S R^4} (w^V + 2w''' + w') = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение (3.23) и удерживая величины второго порядка малости, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} - 4\varepsilon_2(\varepsilon_2 + \cos 2\varphi + 2\varepsilon_2 \cos^2 2\varphi) \ddot{w} - \\ - \varepsilon_2(2 \sin 2\varphi - \varepsilon_2 \sin 4\varphi) \ddot{w}' + \\ + \varkappa^2(1 - \varepsilon_2 \cos 2\varphi) (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \\ + 2\varkappa^2 \varepsilon_2(\sin 2\varphi - \varepsilon_2 \sin 4\varphi) (w^V + 2w''' + w') = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Представляя решение этого уравнения в виде

$$w(\varphi, t) = p_2(t) \cos 2\varphi + q_2(t) \sin 2\varphi \quad (3.25)$$

и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе, описывающей динамику второй собственной формы колебаний:

$$\begin{cases} (5 + 11\varepsilon_2^2) \ddot{p}_2 + 18\varkappa^2(2 - \varepsilon_2^2) p_2 = 0; \\ (5 + 11\varepsilon_2^2) \ddot{q}_2 + 18\varkappa^2(2 + \varepsilon_2^2) q_2 = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Разность собственных частот этой системы является величиной расщепления $\Delta_{(2)}$. Элементарные вычисления показывают, что разность собственных частот равна

$$\Delta_{(2)} = \frac{8}{5} \varepsilon_2^2 \frac{6\varkappa}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5} \varepsilon_2^2 \omega_0.$$

Отметим, что это – приближенное вычисление и важно то, что расщепление имеет порядок квадрата величины дефекта по второй гармонике.

Аналогично показывается, что расщепление частоты, вызванное первой и третьей гармониками дефекта, также пропорционально квадратам величин соответствующих дефектов.

Таким образом, при балансировке резонатора основное внимание следует уделять четвертой гармонике дефекта, поскольку эта гармоника вызывает расщепление частоты на порядок больше, чем остальные гармоники.

3.3. Погрешности ВТГ, вызываемые вибрациями основания

Влияние вибраций основания на поведение стоячей волны подробно исследовано в работах [5, 6, 17]. При наличии первой, второй и третьей гармоник распределения массы резонатора по окружному углу волновая картина имеет “паразитную” составляющую, которая искажает полезный сигнал. Это объясняется тем, что помимо основной формы колебаний в резонаторе возбуждается ряд побочных форм, которые вызывают погрешность прибора.

В этом параграфе исследовано влияние продольных и поперечных вибраций на невращающийся резонатор. Показано, каким образом можно использовать действие вибраций для определения амплитуды и ориентации первых трех гармоник дефекта плотности резонатора. Это необходимо для проведения балансировки данных гармоник с целью устранения вибрационных погрешностей ВТГ. Балансировка резонатора по первым трем гармоникам дефекта плотности позволит применять гироскоп в жестких условиях воздействия вибраций.

Рассмотрим влияние поперечной и продольной вибраций на неподвижный резонатор.

Продольная вибрация. Пусть резонатор движется вдоль оси симметрии (рис. 3.2) по закону

$$z = z_0 \cos \lambda t,$$

где z_0 и λ – соответственно амплитуда и частота вибрации.

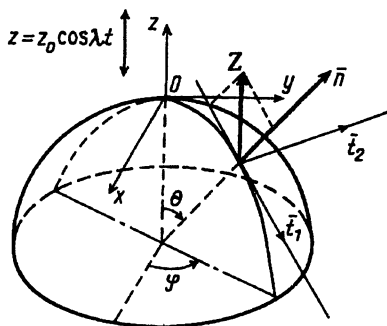


Рис. 3.2. Продольная вибрация резонатора

Сила инерции \mathbf{Z} , возникающая при вибрации, направлена по оси Oz (\bar{k} – единичный вектор оси Oz):

$$\mathbf{Z} = \bar{k} \cdot \rho z_0 \lambda^2 \cos \lambda t.$$

Неоднородность распределения массы представим в виде $\rho = \rho_0 (1 + \varepsilon_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon_2 \cos 2(\varphi - \varphi_2) + \varepsilon_3 \cos 3(\varphi - \varphi_3))$.

Уравнения динамики основной формы возьмем в виде [6]

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{p} + \omega_0^2 p = \frac{1}{\rho_0 m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{F} \cdot \bar{U}_1 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi; \\ \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{\rho_0 m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \bar{F} \cdot \bar{U}_2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \end{cases} \quad (3.27)$$

где

$$\bar{U}_1 = \begin{bmatrix} U \cos 2\varphi \\ V \sin 2\varphi \\ W \cos 2\varphi \end{bmatrix}; \quad \bar{U}_2 = \begin{bmatrix} U \sin 2\varphi \\ -V \cos 2\varphi \\ W \sin 2\varphi \end{bmatrix};$$

$$W = \int_0^{\pi/2} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \theta \, d\theta;$$

U, V, W – функции Релея; Q – добротность; \bar{F} – сила инерции.

Проектируя векторы \bar{U}_1 и \bar{U}_2 на ось Oz , получим:

$$U_{1z} = (W \cos \theta - U \sin \theta) \cos 2\varphi;$$

$$U_{2z} = (W \cos \theta - U \sin \theta) \sin 2\varphi.$$

Выполняя интегрирование, перепишем уравнения (3.27) в виде

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{p} + \omega_0^2 p = \varepsilon_2 z_0 \frac{\alpha}{m} \cos 2\varphi_2 \cos \lambda t; \\ \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} + \omega_0^2 q = \varepsilon_2 z_0 \frac{\alpha}{m} \sin 2\varphi_2 \cos \lambda t, \end{cases} \quad (3.28)$$

где

$$\alpha = \int_0^{\pi/2} (W \cos \theta - U \sin \theta) d\theta.$$

Сила инерции \overline{F} совпадает с вектором \mathbf{Z} в данном случае.

Систему (3.28) решим в случае резонанса: $\lambda = \omega_0$. Найдя функции $p(t)$ и $q(t)$, определим угол ориентации стоячей волны:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = q(t)/p(t) = \operatorname{tg} 2\varphi_2,$$

другими словами, стоячая волна “привязывается” к ориентации второй гармоники дефекта. Здесь воздействие продольной вибрации эквивалентно действию некоторого позиционного возбуждения вдоль оси дефекта по второй гармонике.

Поперечная вибрация. В этом случае резонатор движется следующим образом (рис. 3.3):

$$x = x_0 \cos \lambda t;$$

$$y = y_0 \cos \lambda t.$$

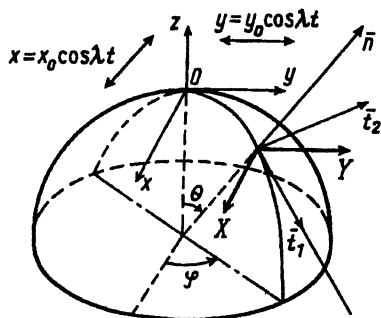


Рис. 3.3. Поперечная вибрация резонатора

Найдем силы инерции, действующие на резонатор:

$$\begin{cases} X = +\rho x_0 \lambda^2 \cos \lambda t; \\ Y = +\rho y_0 \lambda^2 \cos \lambda t. \end{cases}$$

Спроектируем силы инерции, направленные по осям Ox и Oy , на оси локальной системы координат (см. рис. 3.3):

$$\begin{cases} X_u = X \cos \varphi \cos \theta; \\ X_v = -X \sin \varphi; \\ X_w = X \cos \varphi \sin \theta; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_u = Y \sin \varphi \cos \theta; \\ Y_v = -Y \cos \varphi; \\ Y_w = Y \sin \varphi \sin \theta. \end{cases}$$

Тогда уравнения динамики основной формы (3.27) запишутся в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{p} + \omega_0^2 \xi \dot{p} + \omega_0^2 p = & \\ = \frac{1}{m} \lambda^2 \cos \lambda t [A \varepsilon_1 (x_0 \cos \varphi_1 + y_0 \sin \varphi_1) + & \\ + (B + C) \varepsilon_1 (x_0 \cos \varphi_1 - y_0 \sin \varphi_1) - & \\ - B \varepsilon_1 (x_0 \cos 3\varphi_3 + y_0 \sin 3\varphi_3) + & \\ + (A + C) \varepsilon_3 (x_0 \cos 3\varphi_3 + y_0 \sin 3\varphi_3)]; & \quad (3.29) \\ \ddot{q} + \omega_0^2 \xi \dot{q} + \omega_0^2 q = & \\ = \frac{1}{m} \lambda^2 \cos \lambda t [(A + B + C) \varepsilon_1 (x_0 \cos \varphi_1 + y_0 \cos \varphi_1) + & \\ + A \varepsilon_3 (x_0 \sin 3\varphi_3 - y_0 \cos 3\varphi_3) + & \\ + (C - B) \varepsilon_3 (x_0 \sin 3\varphi_3 - y_0 \cos 3\varphi_3), & \end{aligned} \right.$$

где

$$m = \int_0^{\pi/2} (U^2 + V^2 + W^2) \sin \theta \, d\theta;$$

$$A = \int_0^{\pi/2} U \sin \theta \cos \theta d\theta;$$

$$B = \int_0^{\pi/2} V \sin \theta d\theta;$$

$$C = \int_0^{\pi/2} W \sin^2 \theta d\theta;$$

U, V, W – функции Релея.

Решая систему (3.29) в резонансном случае ($\lambda = \omega_0$), находим угол θ ориентации пучности стоячей волны:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{(A + B + C) \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + (A + C - B) \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3}{(A + B + C) \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + (A + C - B) \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3}.$$

Очевидно, что в случае наличия дефекта плотности по первой и третьей гармоникам ориентация стоячей волны определяется углами φ_1 и φ_3 , т.е. поперечная вибрация “привязывает” стоячую волну к третьей и к первой гармоникам дефекта массы.

На основе полученных закономерностей может быть предложен способ идентификации первой и третьей гармоник дефекта массы с целью проведения балансировки. Идея состоит в следующем. В различных точках резонатора и при различных его ориентациях относительно направлений вибраций измеряется величина прогиба. Если произвести два поворота резонатора и при каждом повороте сделать два измерения, то можно получить систему четырех уравнений для нахождения четырех параметров дефектов.

Покажем реализацию этой идеи. Допустим, что поперечная вибрация направлена только вдоль оси Ox . Решая систему (3.29), представим величину прогиба в виде

$$w(\varphi, t) = W(\varphi) F(t, \lambda, \xi),$$

где

$$W(\varphi) = \varepsilon_1 \cos 2\left(\varphi - \frac{1}{2} \varphi_1\right) + \varepsilon_3 \cos 2\left(\varphi - \frac{3}{2} \varphi_3\right).$$

Вид функции $F(t, \lambda, \xi)$ не имеет значения в данном случае.

Делая первое измерение прогиба в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$, выводим два уравнения:

$$\begin{cases} W(0) = W_{11} = \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3; \\ W(\pi/4) = W_{12} = \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3. \end{cases} \quad (3.30)$$

Далее производим поворот резонатора на угол 90° . При втором измерении прогиба в тех же точках учтем, что все дефекты изменили ориентацию на 90° :

$$W^*(\varphi) = \varepsilon_1 \cos(2\varphi - \varphi_1 - \pi/2) + \varepsilon_3 \cos(2\varphi - 3\varphi_3 - 3\pi/2).$$

Значения прогибов в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ равны:

$$\begin{cases} W^*(0) = W_{21} = -\varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3; \\ W^*(\pi/4) = W_{22} = \varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3. \end{cases} \quad (3.31)$$

Решая совместно уравнения (3.30) и (3.31), находим неизвестные параметры дефектов:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(W_{12} - W_{21})^2 + (W_{11} + W_{22})^2};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2} \sqrt{(W_{12} + W_{21})^2 + (W_{11} - W_{22})^2};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{W_{12} - W_{21}}{W_{11} + W_{12}};$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi_1 = \frac{W_{12} + W_{21}}{W_{11} - W_{22}}.$$

Схема идентификации второй гармоники аналогична, только при этом необходимо использовать продольную вибрацию.

3.4. Погрешности ВТГ, вызываемые разнодобротностью резонатора

Наличие диссипации энергии в резонаторе ВТГ приводит к затуханию амплитуды колебаний при условии однородности диссипативных свойств по окружному углу [10]. Если добротность резонатора зависит от окружного угла, появляется скорость ухода стоячей волны.

С целью пояснения терминологии, связанной с добротностью, рассмотрим диссипативные свойства простейшей системы – гармонического осциллятора.

Уравнение движения гармонического осциллятора под действием внешней гармонической силы возьмем в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \omega t,$$

где $\delta = D/(2m)$ – приведенный коэффициент демпфирования; D – коэффициент демпфирования; ω_0 – собственная частота осциллятора; m – масса; F_0 – амплитуда внешней силы; ω – частота внешней силы.

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = B \cos(\omega t - \psi),$$

где

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta^2}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения при резонансе $\omega = \omega_0$. Амплитуда резонансных колебаний

$$B_{\max} = F_0/(2m\omega_0\delta).$$

Статическое отклонение осциллятора под действием постоянной силы F_0

$$B_{\text{ст}} = F_0/(m\omega_0^2).$$

Добротностью осциллятора называется отношение резонансного смещения к статическому:

$$Q = B_{\max}/B_{\text{ст}} = \omega_0/(2\delta).$$

Определенная таким образом добротность Q – безразмерная величина, зависящая от внутренних свойств системы.

Покажем, что величина добротности характеризует время переходного процесса. Для этого возьмем решение исходного уравнения осциллятора с нулевыми начальными условиями:

$$x = \frac{F_0}{2m\omega_0\delta} \left[\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t \right].$$

Перепишем второе слагаемое, характеризующее процесс затухания собственных колебаний, с учетом малости величины δ^2 по сравнению с ω_0^2 ($\delta \ll \omega_0$):

$$e^{-\omega_0 t/(2Q)} \sin \omega_0 t.$$

Часто вводится величина τ , называемая постоянной времени, определяемая как время, за которое амплитуда собственных колебаний уменьшится в e раз. Тогда связь добротности и постоянной времени

$$\omega_0 \tau = 2Q.$$

Отсюда следует, что

$$\tau = 2Q/\omega_0.$$

Определим число колебаний осциллятора за время τ :

$$N = Q/\pi.$$

На основании последней формулы можно сделать вывод, что величина добротности пропорциональна числу колебаний переходного процесса (за время τ).

Оценим влияние добротности на энергетический баланс колебаний. Потеря энергии осциллятором определяется как работа, произведенная силой трения. Допустим, что потери энергии малы за время одного периода колебаний. При таком допущении можно заменить величину кинетической энергии ее средним значением за период и найти среднюю потерю энергии. Возьмем уравнение движения осциллятора в виде

$$m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = 0,$$

где k – жесткость, и преобразуем его для нахождения энергии:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -D\dot{x}^2.$$

Здесь $(1/2)m\dot{x}^2 + (1/2)kx^2$ – полная энергия; $-D\dot{x}^2$ – работа сил трения.

Изменение энергии за период колебаний T составит

$$W(t_0) - W(t_0 + T) = \frac{2DT}{m} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} m\dot{x}^2 dt \approx 2\delta TW(t_0),$$

где $\delta = D/(2m)$, а средняя кинетическая энергия заменена половиной полной энергии. Относительная убыль энергии

$$[W(t_0) - W(t_0 + T)]/W(t_0) = 2\delta T = 2\pi/Q.$$

Видно, что потеря энергии обратно пропорциональна добротности.

Колебания резонатора ВТГ также подвергаются действию сил диссипации. Появление этих сил главным образом объясняется конструктивным демпфированием резонатора и газодинамикой прибора.

Для описания затухающих колебаний упругих тел используется модель Кельвина – Фойгта [9]:

$$\sigma = E(\varepsilon + \xi \dot{\varepsilon}),$$

где σ – тензор напряжений; ε – тензор деформации; ξ – величина, характеризующая время затухания неупругих релаксаций.

Если ξ – постоянная, то колебания резонатора затухают по экспоненциальному закону, при этом свойства колебаний не изменяются. Зависимость величины ξ от окружного угла приводит к тому, что постоянная времени (добротность) зависит от ориентации волновой картины.

Это явление называется разnodобротностью резонатора по окружному углу.

Найдем скорость ухода стоячей волны в разnodобротном резонаторе.

Представим неоднородность величины $\xi(\varphi)$ рядом Фурье по окружному углу φ :

$$\xi(\varphi) = \xi_0 \left(1 + \sum \xi_i \cos i(\varphi - \varphi_i) \right), \quad (3.32)$$

где ξ_0 – номинальное значение; ξ_i – величины относительных дефектов; φ_i – ориентации этих дефектов.

Наиболее существенное влияние на динамику резонатора оказывает четвертая гармоника дефекта, поэтому удержим в разложении (3.32) лишь четвертую гармонику.

Запишем уравнение движения кольцевого резонатора с учетом действия системы параметрического возбуждения:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \varkappa^2 \left(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'' \right) + \varkappa^2 \xi(\varphi) \left(\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'' \right) = R w'' \cos^2 \lambda t, \quad (3.33)$$

где $R = \varepsilon_0 V_0^2 L / (\rho d_0^3 S)$.

Решение уравнения (3.33):

$$w(\varphi, t) = (a \cos \lambda t + m \sin \lambda t) \cos 2\varphi + \\ + (b \cos \lambda t + n \sin \lambda t) \sin 2\varphi. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.33) и применяя метод осреднения, приходим к системе уравнений для медленных переменных a, m, b, n :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{4}{5} \Omega b - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi_0 \left(1 + \frac{1}{2} \xi_4 \cos 4\varphi_4 \right) a - \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega_0^2 \xi_0 \xi_4 \sin 4\varphi_4 b + \frac{1}{2} \frac{R}{\omega_0} m; \\ \dot{m} &= \frac{4}{5} \Omega n - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi_0 \left(1 + \frac{1}{2} \xi_4 \cos 4\varphi_4 \right) m - \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega_0^2 \xi_0 \xi_4 \sin 4\varphi_4 n - \frac{3}{2} \frac{R}{\omega_0} a; \\ \dot{b} &= -\frac{4}{5} \Omega a - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi_0 \left(1 - \frac{1}{2} \xi_4 \cos 4\varphi_4 \right) b - \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega_0^2 \xi_0 \xi_4 \sin 4\varphi_4 a + \frac{1}{2} \frac{R}{\omega_0} n; \\ \dot{n} &= -\frac{4}{5} \Omega m - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi_0 \left(1 - \frac{1}{2} \xi_4 \cos 4\varphi_4 \right) n - \\ &\quad - \frac{1}{4} \omega_0^2 \xi_0 \xi_4 \sin 4\varphi_4 m - \frac{3}{2} \frac{R}{\omega_0} b. \end{aligned} \right. \quad (3.35)$$

Изменение ориентации пучности стоячей волны (3.34) найдем из соотношения

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + m^2}}.$$

После несложных преобразований приходим к выражению, определяющему скорость прецессии (скорость ухода) стоячей волны:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -K\Omega + \frac{1}{4}\omega_0^2\xi_0\xi_4 \sin 4(\vartheta - \varphi_4), \quad (3.36)$$

где K – масштабный коэффициент ВТГ.

Уравнение типа (3.36) подробно исследовано в [7]. Показано, что если входная угловая скорость Ω удовлетворяет условию

$$|\Omega| < \Omega^* = \frac{1}{4K} \omega_0^2 \xi_0 \xi_4,$$

то интегрирующий эффект гироскопа отсутствует. Если выполнено условие

$$|\Omega| > \Omega^*,$$

то интегрирующий эффект сохраняется с некоторой систематической погрешностью. Пороговое значение угловой скорости составляет: $\Omega^* \approx 1$ град/ч [7]; область $(0 - \Omega^*)$ называют областью, или зоной, “захвата” стоячей волны.

Зависимость средней скорости ухода ВТГ от входной угловой скорости показана на рис. 3.4.

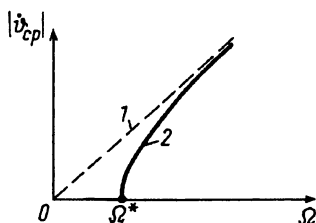


Рис. 3.4. Зависимость средней скорости ухода ВТГ от входной угловой скорости:

1 – прямая, задаваемая уравнением $|v_{cp}| = K\Omega$; 2 – зависимость средней скорости ухода ВТГ в разнородном резонаторе (Ω^* – область “захвата”)

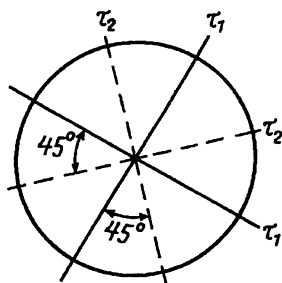


Рис. 3.5. Собственные оси вязкости, $\tau_2 > \tau_1$

Наличие четвертой гармоники дефекта диссипации приводит к появлению в резонаторе системы двух осей, развернутых на 45° , называемых “собственными осями вязкости” (рис. 3.5). Постоянные времени колебаний вдоль каждой из этих осей τ_2 и τ_1 достигают наибольшего и наименьшего значений. Способа определения собственных осей вязкости в настоящее время не существует, поэтому механическая компенсация скорости ухода (3.36) затруднена. Систематическая составляющая скорости ухода (3.36) составляет $0,32$ град/ч [7].

Компенсация скорости ухода, вызываемого разнородностью, еще осложняется тем, что добротность (или постоянная времени) является нестабильной величиной. Известно, что при напылении на поверхность резонатора проводящего слоя добротность резко падает. Это объясняется тем, что в напыленном слое и на его границе с плавленым кварцем резонатора возникает дополнительное демпфирование.

3.5. Погрешности ВТГ, связанные с дефектами систем возбуждения резонатора

Идеальный резонатор имеет скорость ухода, если система его возбуждения неидеальна (нестабильность напряжения питания кольцевого электрода, некруглость кольцевого электрода). Рассмотрим эти случаи подробнее.

Нестабильность напряжения питания кольцевого электрода. Пусть амплитуда напряжения питания кольцевого электрода имеет четвертую гармонику по окружному углу:

$$V = (V_0 + v \cos 4\varphi) \cos \lambda t,$$

причем $v \ll V_0$.

Залишем уравнения кольцевой модели:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \varkappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') + \varkappa^2 \xi (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') = N, \quad (3.37)$$

где

$$N = \frac{\varepsilon_0 V_0^2 L}{\rho S d_0^3} w'' \cos^2 \lambda t + \\ + \frac{2\varepsilon_0 V_0 v L}{\rho S d_0^3} \left[(w'' - 16w) \cos 4\varphi - 8w' \sin 4\varphi \right] \cos^2 \lambda t,$$

здесь удержана четвертая гармоника и отброшены члены порядка v^4 .

Введем обозначения: $R = \varepsilon_0 V_0^2 L / (\rho S d_0^3)$, $T = \varepsilon_0 V_0 v L / (\rho S d_0^3)$. Решение уравнения (3.37) представим в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (3.38)$$

Подставляя (3.38) в (3.37) и применяя метод Бубнова-Галеркина, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p} - \frac{8}{5} \Omega \dot{q} + \omega^2 \xi \dot{p} \omega_0^2 p = -\frac{4}{5} (R + T) p \cos^2 \lambda t; \\ \ddot{q} + \frac{8}{5} \Omega \dot{p} + \omega^2 \xi \dot{q} \omega_0^2 q = -\frac{4}{5} (R - T) q \cos^2 \lambda t. \end{cases}$$

Эту систему будем решать при условии $\lambda = \omega_0$ с помощью метода осреднения. В результате получаем систему относительно медленных переменных a, m, b, n , которые определяют изменение функций p и q : $p = a \cos \lambda t + m \sin \lambda t$, $q = b \cos \lambda t + n \sin \lambda t$.

Систему запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{a} = 2K\Omega b - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi a + \frac{Rm}{10\omega_0} - \frac{Tm}{20\omega_0}; \\ \dot{m} = 2K\Omega a - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi m - \frac{3Ra}{20\omega_0} + \frac{3Ta}{20\omega_0}; \\ \dot{b} = -2K\Omega n - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi b + \frac{Rn}{10\omega_0} + \frac{Tn}{20\omega_0}; \\ \dot{n} = 2K\Omega m - \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi n - \frac{3Rb}{10\omega_0} - \frac{3Tb}{20\omega_0}. \end{cases}$$

Из этих уравнений следует, что скорость ухода стоячей волны выражается следующим образом:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -K\Omega - \frac{1}{40} \frac{T}{\omega_0} \sin 4\vartheta, \quad (3.39)$$

где K – масштабный коэффициент ВТГ.

С помощью уравнения (3.39) находим размер области “захвата”, т.е. отсутствия интегрирующего эффекта:

$$\Omega^* = \frac{1}{16} \frac{T}{\omega_0}. \quad (3.40)$$

Согласно п. 2.4, амплитуда напряжения V_0 и частота ω таковы, что выполнено соотношение (условие минимума на границе области устойчивости)

$$\frac{\varepsilon_0 V_0^2 L}{\rho d_0^3 S} = \frac{5\omega_0^2}{Q}. \quad (3.41)$$

При выводе формулы (3.41) учтено и выражение для величины добротности Q (см. п. 3.4).

С учетом (3.41) перепишем (3.40) в виде

$$\Omega^* = \frac{5}{16} \frac{\omega_0}{Q} \frac{v}{V_0}.$$

Для примера возьмем значения параметров: $v = 10^{-3}V_0$, $\omega_0 = 16 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, $Q = 10^7$. Граничная угловая скорость $\Omega^* \approx 0,103 \text{ град/ч}$.

Некруглость кольцевого электрода по четвертой гармонике. Пусть величина зазора между кольцевым электродом и резонатором имеет четвертую гармонику по окружающему углу:

$$d = d_0 + e \cos 4\varphi + w(\varphi, t),$$

где e – эксцентриситет.

Поскольку вычисления мало отличаются от приведенных выше, запишем результат (выражение для скорости ухода стоячей волны):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -K\Omega + \frac{1}{2} \gamma \sin 4\vartheta,$$

где $K = 0,4$; $\gamma = 3\varepsilon_0 V_0^2 eL / (20\omega_0 \rho d_0^4 S)$.

Область захвата равна:

$$\Omega^* = \frac{15}{16} \frac{\omega_0}{Q} \frac{e}{d_0}.$$

Если, например, $d_0 = 100$ мкм, $e = 0,1$ мкм, $Q = 10^7$, $\omega = 15,7 \cdot 10^3$ с⁻¹, то размер области захвата составит $\Omega^* = 0,304$ град/ч.

Комбинация дефектов: вторая гармоника напряжения и вторая гармоника некруглости. Представим соответствующие дефекты в виде

$$V = v_0 + v \cos 2\varphi + V_0 \cos \lambda t;$$

$$d = d_0 + e \cos 2\varphi + w(\varphi, t).$$

В выражении для внешней нагрузки (правая часть уравнения кольцевой модели) удерживаем только вторую гармонику:

$$N = R w'' \cos^2 \lambda t + (k_1 + k_2) \cos 2\varphi \cos \lambda t,$$

где $k_1 = -8\varepsilon_0 v_0 V_0 eL / (\rho d_0^4 S)$; $k_2 = 4\varepsilon_0 L v_0 V_0 / (\rho S d_0^3)$.

Вычисление показывает, что скорость ухода определяется следующим образом:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -K\Omega + \frac{1}{20} \frac{1}{\omega_0 r_0} (k_1 + k_2) \sin 2\vartheta, \quad (3.42)$$

где $r_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + m_0^2 + n_0^2$ — номинальное значение амплитуды колебаний.

Из формулы (3.42) следует, что если выбрать параметры так, чтобы выполнялось условие $k_1 + k_2 = 0$, то скорость ухода, определяемая вторым слагаемым (3.42), обратится в нуль. Несложно установить, что параметры должны удовлетворять соотношению $v/v_0 = 2e/d_0$.

3.6. Погрешности выставки электродов съема для ВТГ-ДУС

Пусть резонатор имеет расщепление частоты по четвертой гармонике дефекта массы и находится под действием позиционного возбуждения на неподвижном основании (режим ДУС).

Возьмем уравнение динамики рабочей формы в виде (см. гл. 2; (2.32))

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{p}(t) + \omega_1^2 p(t) = -\frac{H}{5} \cos 2\varphi_3 \cos \lambda t; \\ \ddot{q}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q}(t) + \omega_2^2 q(t) = -\frac{H}{5} \sin 2\varphi_3 \cos \lambda t, \end{cases} \quad (3.43)$$

где ω_1 и ω_2 – соответственно наименьшая и наибольшая частоты; ω_0 – собственная частота; Q – добротность; φ_3 – угол ориентации электродов позиционного возбуждения.

Представим функции $p(t)$ и $q(t)$ в виде

$$\begin{aligned} p(t) &= A \sin(\lambda t + \Delta_1); \\ q(t) &= B \sin(\lambda t + \Delta_2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Подставляя (3.44) в (3.43) и приравнявая коэффициенты при $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$, находим неизвестные величины Δ_1, Δ_2, A, B :

$$\begin{aligned} \sin \Delta_1 &= \frac{\omega_1^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \\ \cos \Delta_1 &= \frac{\omega \lambda / Q}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \sin \Delta_2 &= \frac{\omega_2^2 - \lambda^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \\ \cos \Delta_2 &= \frac{\omega \lambda / Q}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$A = -\frac{1}{5} H \frac{\cos 2\varphi_3}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \quad (3.47)$$

$$B = -\frac{1}{5} H \frac{\sin 2\varphi_3}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}. \quad (3.48)$$

Тогда решение примет следующий вид:

$$w(\varphi, t) = A \sin(\lambda t + \Delta_1) \cos 2\varphi + B \sin(\lambda t + \Delta_2) \sin 2\varphi, \quad (3.49)$$

где амплитуды и фазы собственных форм определены формулами (3.45) – (3.48).

Основной интерес представляют колебания в точках, соответствующих ориентациям датчиков Д1 и Д2 системы съема. Допустим, что датчик Д1 ориентирован под углом $\varphi_1 = \varphi_3$, а датчик Д2 – под углом $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/4$.

Используя выражение (3.49), находим сигналы датчиков:

датчик Д1:

$$w_1(t) = -\frac{H}{5} \frac{\cos^2 2\varphi_3 - \sin(\lambda t + \Delta_1)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}} - \frac{H}{5} \frac{\sin^2 2\varphi_3 \sin(\lambda t + \Delta_2)}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}}; \quad (3.50)$$

датчик Д2:

$$w_2(t) = \frac{H}{10} \sin 4\varphi_3 \left(\frac{\sin(\lambda t + \Delta_1)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}} - \frac{\sin(\lambda t + \Delta_2)}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2)^2 + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}} \right). \quad (3.51)$$

Из (3.51) видно, что сигнал датчика Д2 отличен от нуля, это указывает на вращение резонатора (см. п. 2.4).

Угол ϑ ориентации стоячей волны относительно резонатора вычисляется следующим образом (см. п. 2.4):

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{w_2^*}{w_1^*},$$

где w_1^* и w_2^* — демодулированные сигналы (3.50) и (3.51) соответственно.

Покажем, что, выбирая определенным образом опорную фазу демодулятора, можно скомпенсировать погрешность.

Представим сигнал демодулятора в следующем виде: $\sin(\lambda t + \Delta_0)$, где Δ_0 — сдвиг фазы, который необходимо найти.

Определим величину Δ_0 из условия $w_2^*(t) = 0$.

Используя выражение (3.51), находим:

$$w^*(t) = \frac{H}{5} \sin 4\varphi_3 \left(\frac{\cos(\Delta_1 - \Delta_0)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \lambda^2) + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}} - \frac{\cos(\Delta_2 - \Delta_0)}{\sqrt{(\omega_2^2 - \lambda^2) + \omega_0^2 \lambda^2 / Q^2}} \right). \quad (3.52)$$

Воспользуемся тем, что верно соотношение величин:

$$\left(\frac{\omega \lambda}{Q} \right)^2 \gg (\omega_i^2 - \lambda^2)^2, \quad i = 1, 2.$$

Действительно, порядок величин следующий:

$$\omega_0 \approx \lambda \approx 10^3 \text{ Гц}, \quad Q \approx 10^6, \quad \omega_2 - \lambda \approx \omega_1 - \lambda \approx 10^{-5} \text{ Гц}.$$

Тогда из формулы (3.52) следует, что при значении опорной фазы, равном полусумме фаз собственных форм, т.е.

$$\Delta_0 = 0,5(\Delta_1 + \Delta_2),$$

сигнал w_2^* обращается в нуль и погрешность будет скомпенсирована.

3.7. Интерпретация формулы для скорости ухода ТВГ, имеющего дефект по четвертой гармонике

В п. 3.2 формула для скорости ухода стоячей волны в разночастотном резонаторе получена на основе представления волнового процесса в виде суммы двух стоячих волн, ортогональных по окружному углу и по временной фазе. В этом параграфе приведен инженерный вывод этой формулы.

Как указывалось ранее, колебания в разночастотном резонаторе в начальный момент времени, имеющие форму стоячей волны, ориентированной под углом φ_0 , со временем примут вид

$$w(\varphi, t) = A \cos 2\varphi_0 \cos 2\varphi \cos \omega_1 t + \\ + A \sin 2\varphi_0 \sin 2\varphi \cos \omega_2 t, \quad (3.53)$$

где ω_1 и ω_2 – соответственно наименьшая и наибольшая частоты; угол φ отсчитывается от оси “меньшей жесткости” по ходу часовой стрелки.

Рассмотрим колебательный процесс в точке $\varphi = \varphi_0$:

$$w_1(t) \equiv w(\varphi_0, t) = A \cos^2 2\varphi_0 \cos \omega_1 t + \\ + A \sin^2 2\varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (3.54)$$

Используя сигналы с датчиков Д1 и Д2 системы съема, ориентированных под углами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ соответственно, можно экспериментально получить значения сигналов:

датчик Д1: $x = A \cos 2\varphi_0 \cos \omega_1 t$;

датчик Д2: $y = A \sin 2\varphi_0 \cos \omega_2 t$.

Тогда можно записать

$$w_1(t) = x \cos 2\varphi_0 + y \sin 2\varphi_0, \quad (3.55)$$

т.е. выражение (3.54) определяется экспериментально.

Далее, преобразуем (3.54) следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= A \cos^2 2\varphi_0 \cos \omega_1 t + A \sin^2 2\varphi_0 \cos \omega_2 t = \\ &= A \cos^2 2\varphi_0 \cos((\omega_2 - \Delta)t) + A \sin^2 2\varphi_0 \cos \omega_2 t = \\ &= A(\cos^2 2\varphi_0 \cos \Delta t \cos \omega_2 t + \sin^2 2\varphi_0 \cos \omega_2 t) + \\ &+ A \cos^2 2\varphi_0 \sin \Delta t \sin \omega_2 t = \left[A(\cos^2 2\varphi_0 \cos \Delta t + \right. \\ &\left. + \sin^2 2\varphi_0) \right] \cos \omega_2 t + A \cos^2 2\varphi_0 \sin \Delta t \sin \omega_2 t = \\ &= A \sqrt{(\cos^2 2\varphi_0 \cos \Delta t + \sin^2 2\varphi_0)^2 + \cos^4 2\varphi_0 \sin^2 \Delta t} \times \\ &\times \cos(\omega_2 t - \gamma) = A \sqrt{1 - (\Delta t)^2 \sin^2 2\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0} \cos(\omega_2 t - \gamma), \end{aligned}$$

где $\Delta = \omega_2 - \omega_1$; $\gamma \approx \sin \gamma = \Delta t \cos^2 2\varphi_0 = (\omega_2 - \omega_1)t \cos^2 2\varphi_0$.

Окончательно имеем:

$$w_1(t) = A \left(1 - 0,5 \Delta^2 t^2 \sin^2 2\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0 \right) \cos \omega^* t,$$

где $\omega^* = \omega_1 \cos^2 2\varphi_0 + \omega_2 \sin^2 2\varphi_0$.

В преобразованиях использовалось предположение малости величины Δt . Далее величину порядка Δt будем обозначать ε .

Рассмотрим, как развивается колебательный процесс в точке $\varphi = \varphi_0 + \pi/4$:

$$\begin{aligned} w_2(t) &\equiv w(\varphi_0 + \pi/4, t) = \\ &= A \cos 2\varphi_0 \sin 2\varphi_0 (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t). \quad (3.56) \end{aligned}$$

Выражение (3.56) можно получить экспериментально:

$$w_2(t) = y \cos 2\varphi - x \sin 2\varphi.$$

Преобразуем (3.56) следующим образом:

$$\begin{aligned} w_2(t) &= \frac{1}{2} A \sin 4\varphi_0 \cdot 2 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t = \\ &= -\frac{1}{2} A \Delta t \sin 4\varphi_0 \sin \omega^{**} t, \quad (3.57) \end{aligned}$$

где $\omega^{**} = (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Пользуясь выражениями (3.55), (3.57), выразим сигналы датчиков съема через перемещения в точках $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = \varphi_0 + \pi/4$:

$$\begin{aligned} x &= -w_2(t) \sin 2\varphi_0 + w_1(t) \cos 2\varphi_0; \\ y &= w_2(t) \cos 2\varphi_0 + w_1(t) \sin 2\varphi_0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения сигналов $w_1(t)$ и $w_2(t)$, получаем:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} A \Delta t \sin 4\varphi_0 \sin 2\varphi_0 \sin \omega^{**} t + \\ &\quad + A \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2\right) \cos 2\varphi_0 \cos \omega^* t; \\ y &= -\frac{1}{2} A \Delta t \sin 4\varphi_0 \cos 2\varphi_0 \sin \omega^{**} t + \\ &\quad + A \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2\right) \sin 2\varphi_0 \cos \omega^* t. \end{aligned} \quad (3.58)$$

С помощью выражений (3.58) можно выделить “узловые” колебания, используя опорный сигнал демодулятора $\cos \omega^* t$. Но поскольку $\omega^* \neq \omega^{**}$, узловые колебания имеют составляющие, синфазные с опорным сигналом, что приводит к погрешности прибора. Действительно, после демодуляции с опорным сигналом $\cos \omega^* t$ имеем:

$$\begin{aligned} x_d &= A \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \cos 4\varphi_0 \sin^2 2\varphi_0\right) \cos 2\varphi_0; \\ y_d &= A \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \cos 4\varphi_0 \cos^2 2\varphi_0\right) \sin 2\varphi_0, \end{aligned}$$

откуда находим тангенс двойного угла ориентации стоячей волны:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{y_d}{x_d} = \operatorname{tg} 2\varphi_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 t^2 \operatorname{tg} 2\varphi_0 \cos 4\varphi_0. \quad (3.59)$$

Формула для угла, характеризующего уход стоячей волны, приведенная в п. 3.2, получается из (3.59) с помощью элементарных преобразований.

Еще раз отметим, что формула (3.59) зависит от выбора опорного сигнала демодулятора.

Из проведенного анализа поведения стоячей волны в разночастотном резонаторе следует, что для формирования опорной частоты необходимо использовать сигнал $w_1 = x \cos 2\varphi_0 + y \cos 2\varphi_0$, формируемый с помощью обратных связей.

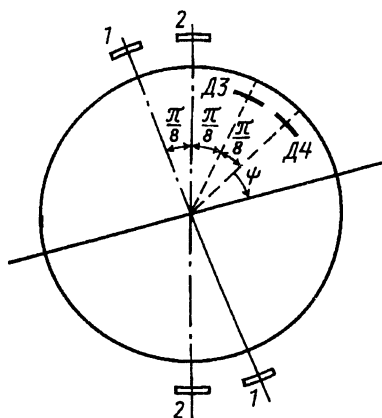
Сигнал $w_2 = -x \sin 2\varphi_0 + y \cos 2\varphi_0$ можно использовать в канале формирования напряжения на корректирующих электродах для того, чтобы устранить узловые колебания с целью уменьшения погрешности показаний прибора.

3.8. Определение величины расщепления частоты и ориентации собственных осей жесткости

Рассмотрим схему, приведенную на рис. 3.6. Датчик ДЗ используется для измерения колебаний в узле стоячей волны, возбужденной с помощью пары электродов 1, а датчик Д4 – для измерения узловых колебаний стоячей волны, возбужденной парой электродов 2. Угол будем отсчитывать относительно электродов 2 по ходу часовой стрелки.

Пусть ψ – угол между направлением датчика Д4 и ближайшей к нему собственной осью. Возбуждаем волну электродами 1, затем отключаем напряжение и смотрим процесс свободных колебаний. При этом с датчика Д3 пойдет сигнал

Рис. 3.6. Измерение расщепления частоты и положения собственных осей жесткости: 1, 2 – электроды



с амплитудой (для амплитуды узловых колебаний используется выражение (3.16) дополнительной стоячей волны):

$$A_3 = \alpha A = \frac{1}{2} \Delta t \sin 4(\psi + \pi/8) = \frac{1}{2} A \Delta t \cos 4\psi, \quad (3.60)$$

где t – время, прошедшее с момента отключения питания; Δ – величина расщепления частоты.

Далее, возбуждаем волну электродами и отключаем возбуждение. Сигнал датчика имеет вид

$$A_4 = \frac{1}{2} A \Delta t \sin 4\psi. \quad (3.61)$$

Измерение амплитуд узловых колебаний необходимо проводить в интервале времени t , меньшем постоянной времени резонатора τ , для того чтобы считать амплитуды постоянными величинами в данном интервале времени.

Из (3.60) и (3.61) получаем:

$$\Delta = \frac{2}{At} \sqrt{(A_3)^2 + (A_4)^2};$$

$$\operatorname{tg} 4\psi = A_4/A_3,$$

где A – амплитуда основной стоячей волны, которая считается известной величиной.

4. ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ СТОЯЧЕЙ ВОЛНОЙ В РАЗНОЧАСТОТНОМ РЕЗОНАТОРЕ ВТГ

В гл. 3 отмечалось, что в резонаторе ВТГ, имеющем дефект по четвертой гармонике, стоячая волна не может существовать длительное время. Поэтому в реальном приборе функционируют системы управления, поддерживающие колебания резонатора в форме стоячей волны.

В этой главе рассмотрены принципы работы следующих систем управления: системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ) и системы 16-электродной коррекции стоячей волны.

4.1. Принцип работы системы фазовой автоподстройки частоты

Система ФАПЧ функционирует в режиме интегрирующего ВТГ и предназначена для того, чтобы поддерживать частоту напряжения питания кольцевого электрода около значения, обеспечивающего параметрический резонанс. Параметрическое возбуждение основано на появлении параметрического резонанса, но в неидеальном резонаторе условие резонанса может нарушиться по ряду причин: расщепление собственной частоты, неустойчивость собственной частоты резонатора, дрейф частоты генератора напряжения, шумы в цепях питания и т. д. В связи с этим настройка гироскопа на резонанс имеет большое значение.

Возьмем уравнения движения невращающегося резонатора, имеющего расщепление частоты по четвертой гармонике, в режиме параметрического возбуждения. Так как задача

рассматривается в линейной постановке, то к полученному решению можно прибавить решение, обусловленное угловой скоростью вращения резонатора. Уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{\omega_1}{Q} \dot{p} + \omega_1^2 p = \frac{4}{5} M V_0^2 p \cos^2 \lambda t; \\ \ddot{q} + \frac{\omega_2}{Q} \dot{q} + \omega_2^2 q = \frac{4}{5} M V_0^2 q \cos^2 \lambda t, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $M = \varepsilon_0 L / (\rho_0 S d_0^3)$. Будем считать, что $\omega_1 > \omega_2$.

Систему (4.1) будем решать методом двух масштабов [10]. Согласно этому методу, вводятся две переменные времени: $\tau_1 = \varepsilon t \omega_0$ — “медленная”, $\tau_0 = \omega_0 t$ — “быстрая”. Малый параметр ε определяется следующим образом: $\varepsilon = Q_0 / Q$.

Далее все переменные, входящие в уравнения, необходимо представить в виде рядов по степеням малого параметра с точностью до первого порядка:

$$\begin{cases} p(\tau_0, \tau_1) = p_0(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon p_1(\tau_0, \tau_1); \\ q(\tau_0, \tau_1) = q_0(\tau_0, \tau_1) + \varepsilon q_1(\tau_0, \tau_1); \\ \omega_1 = \omega_0(1 + \varepsilon \omega_{1p}); \\ \omega_2 = \omega_0(1 + \varepsilon \omega_{1q}); \\ \lambda = \omega_0(1 + \varepsilon \lambda_1). \end{cases}$$

Оператор дифференцирования представим в виде

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} \right).$$

Кроме того, выразим амплитуду напряжения следующим образом:

$$\frac{4}{5} M V_0^2 = 2\varepsilon V_*^2 \omega_0^2,$$

где V_* — некоторая безразмерная амплитуда.

Подставив разложения по степеням ε в систему уравнений (4.1), приравняем выражения при одинаковых степенях ε ; получим уравнения нулевого приближения (при ε^0):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_0}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{Q_0} \frac{\partial p_0}{\partial \tau_0} + p_0 = 0; \\ \frac{\partial^2 q_0}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{Q_0} \frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} + q_0 = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Представим решение уравнений (4.2) в следующей форме:

$$\begin{cases} p_0 = a(\tau_1) \cos[\tau_0 - \psi_1(\tau_1)]; \\ q_0 = b(\tau_1) \cos[\tau_0 - \psi_2(\tau_1)], \end{cases} \quad (4.3)$$

где амплитуды $a(\tau_1)$, $b(\tau_1)$ и фазы $\psi_1(\tau_1)$, $\psi_2(\tau_1)$ являются функциями “медленной” переменной τ_1 . В рамках нулевого приближения можно считать, что $\psi_1 = \psi_2$.

Уравнения первого приближения (при малых ε):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \tau_0^2} + p_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{\partial p_0}{\partial \tau_0} \right) + \frac{1}{Q_0} \frac{\partial p_0}{\partial \tau_0} + 2\omega_{1p} p_0 = \\ \quad = V_*^2 (1 + \cos(2\tau_0 + 2\lambda_1 \tau_1)); \\ \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau_0^2} + q_1 + 2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} \right) + \frac{1}{Q_0} \frac{\partial q_0}{\partial \tau_0} + 2\omega_{1q} q_0 = \\ \quad = V_*^2 (1 + \cos(2\tau_0 + 2\lambda_1 \tau_1)). \end{cases} \quad (4.4)$$

Подставим в (4.4) выражения нулевого приближения (4.3), в результате получим систему

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left[-a \sin(\tau_0 - \psi_1) \right] - \frac{1}{Q_0} a \sin(\tau_0 - \psi_1) + \\ \quad + 2\omega_{1p} a \cos(\tau_0 - \psi_1) = \\ \quad = V_*^2 a \left[\cos(\tau_0 - \psi_1) + \cos(\tau_0 - \psi_1) \cos(2\tau_0 + 2\lambda_1 \tau_1) \right]; \\ 2 \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left[-b \sin(\tau_0 - \psi_2) \right] - \frac{1}{Q_0} b \sin(\tau_0 - \psi_2) + \\ \quad + 2\omega_{1q} b \cos(\tau_0 - \psi_2) = \\ \quad = V_*^2 b \left[\cos(\tau_0 - \psi_2) + \cos(\tau_0 - \psi_2) \cos(2\tau_0 + 2\lambda_1 \tau_1) \right]. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что при наличии ненулевых коэффициентов при резонансных членах ($\cos \tau_0$ и $\sin \tau_0$) функции $p_1(\tau_0, \tau_1)$ и $q_1(\tau_0, \tau_1)$ будут неограниченными для “быстрой” переменной τ_0 , чего не может быть. Поэтому для нахождения эволюции амплитуд и фаз в “медленной” переменной времени τ_1 необходимо приравнять указанные коэффициенты нулю. В результате получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \sin \psi_1 + 2a \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \cos \psi_1 + \frac{a}{Q_0} \sin \psi_1 + 2\omega_{1p} b \cos \psi_1 = \\ \quad = V_*^2 a \left(\cos \psi_1 + \frac{1}{2} \cos(\psi_1 + 2\lambda_1 \tau_1) \right); \\ -2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} \cos \psi_1 + 2a \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \sin \psi_1 - \frac{a}{Q_0} \cos \psi_1 + 2\omega_{1p} a \sin \psi_1 = \\ \quad = V_*^2 a \left(\sin \psi_1 - \frac{1}{2} \sin(\psi_1 + 2\lambda_1 \tau_1) \right); \\ 2 \frac{\partial b}{\partial \tau_1} \sin \psi_2 + 2a \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau_1} \cos \psi_2 + \frac{b}{Q_0} \sin \psi_2 + 2\omega_{1q} a \cos \psi_2 = \\ \quad = V_*^2 b \left(\cos \psi_2 + \frac{1}{2} \cos(\psi_2 + 2\lambda_1 \tau_1) \right); \\ -2 \frac{\partial b}{\partial \tau_1} \cos \psi_2 + 2b \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau_1} \sin \psi_2 - \frac{b}{Q_0} \cos \psi_2 + 2\omega_{1q} a \sin \psi_2 = \\ \quad = V_*^2 b \left(\sin \psi_2 - \frac{1}{2} \sin(\psi_2 + 2\lambda_1 \tau_1) \right). \end{array} \right.$$

После элементарных преобразований имеем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} + \frac{a}{Q_0} = \frac{1}{2} V_*^2 a \sin(2\psi_1 + 2\lambda_1 \tau_1); \\ 2a \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} + 2\omega_{1p} a = V_*^2 a \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\psi_1 + 2\lambda_1 \tau_1) \right); \\ 2 \frac{\partial b}{\partial \tau_1} + \frac{b}{Q_0} = \frac{1}{2} V_*^2 b \sin(2\psi_2 + 2\lambda_1 \tau_1); \\ 2b \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau_1} + 2\omega_{1q} b = V_*^2 b \left(1 + \frac{1}{2} \cos(2\psi_2 + 2\lambda_1 \tau_1) \right). \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Сделаем замену переменных в уравнениях (4.5):

$$\psi_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha - \lambda_1 \tau_1; \quad \psi_2 = \frac{\pi}{4} + \beta - \lambda_1 \tau_1.$$

В новых переменных α и β система (4.5) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial a}{\partial \tau_1} = -\frac{a}{Q_0} + \frac{1}{2} a V_*^2 \cos 2\alpha; \\ 2a \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} = 2a(\lambda_1 - \omega_{1p}) + a V_*^2 - \frac{1}{2} a V_*^2 \sin 2\alpha; \\ 2 \frac{\partial b}{\partial \tau_1} = -\frac{b}{Q_0} + \frac{1}{2} b V_*^2 \cos 2\beta; \\ 2b \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} = 2b(\lambda_1 - \omega_{1q}) + b V_*^2 - \frac{1}{2} b V_*^2 \sin 2\beta. \end{cases} \quad (4.6)$$

В новых переменных нулевое приближение (4.3) примет вид

$$\begin{aligned} p_0 &= a \cos(\lambda_1 \tau_1 - \pi/4 - \alpha); \\ q_0 &= b \cos(\lambda_1 \tau_1 - \pi/4 - \beta). \end{aligned}$$

Переменные α и β определяют отклонение фаз собственных колебаний от их идеальных значений, поэтому в силу малости расщепления собственной частоты и влияния затухания на величину сдвига фаз, α и β можно считать малыми величинами (по сравнению с единицей).

Величина питающего напряжения V_* является функцией медленных переменных a и b и формируется таким образом, что амплитуда $\sqrt{a^2 + b^2}$ остается постоянной. Учитывая это условие, получаем выражение для напряжения питания кольцевого электрода:

$$V_*^2 = \frac{2}{Q_0} \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cos 2\alpha + b^2 \cos 2\beta}. \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) подставляем в 1-е и 3-е уравнения системы (4.6) и, считая α и β малыми, преобразуем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} &= \frac{a}{Q_0} \frac{b^2(\beta^2 - \alpha^2)}{a^2 + b^2}; \\ \frac{\partial b}{\partial \tau_1} &= -\frac{b}{Q_0} \frac{a^2(\beta^2 - \alpha^2)}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее, рассмотрим 2-е и 4-е уравнения системы (4.6), определяющие эволюцию фаз. Они имеют стационарное решение:

$$\alpha = 1 + Q_0(\lambda_1 - \omega_{1p});$$

$$\beta = 1 + Q_0(\lambda_1 - \omega_{1q}).$$

Отсюда находим

$$\beta - \alpha = Q_0(\omega_{1p} - \omega_{1q}) = Q \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

С учетом последнего равенства перепишем уравнения (4.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial \tau_1} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} (\omega_{1p} - \omega_{1q}) (\alpha + \beta); \\ \frac{\partial b}{\partial \tau_1} = -\frac{ba^2}{a^2 + b^2} (\omega_{1p} - \omega_{1q}) (\alpha + \beta). \end{cases} \quad (4.9)$$

Угол ориентации ϑ волновой картины находим из соотношения (4.3), учитывая, что в нулевом приближении фазы совпадают:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = b/a.$$

В силу (4.9) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_1} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \frac{a \frac{\partial b}{\partial \tau_1} - b \frac{\partial a}{\partial \tau_1}}{a^2 + b^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{ab}{a^2 + b^2} (\omega_{1p} - \omega_{1q}) (\alpha + \beta), \end{aligned}$$

но

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \sin 4\vartheta,$$

поэтому

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{4} (\omega_{1p} - \omega_{1q}) (\alpha + \beta) \sin 4\vartheta.$$

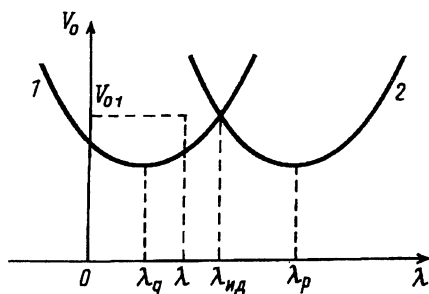


Рис. 4.1. Области устойчивости разночастотного резонатора: 1 – область устойчивости формы $p(t)$; 2 – область устойчивости формы $q(t)$

В реальном времени получаем ($\Omega = 0$):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{4} \Delta\omega(\alpha + \beta) \sin 4\vartheta. \quad (4.10)$$

Рассмотрим причины скорости ухода (4.10). Для этого построим границы областей устойчивости колебаний по собственным формам $p(t)$ и $q(t)$ (рис. 4.1).

На рис. 4.1 видно, что ограниченные колебания по обеим формам существуют при единственном (“идеальном”) значении частоты напряжения кольцевого электрода, соответствующем точке пересечения границ: $\lambda = \lambda_{ид}$. Если частота питающего напряжения не равна $\lambda_{ид}$ ($\lambda < \lambda_{ид}$), система стабилизации амплитуды формирует напряжение V_{01} , такое, что сумма квадратов амплитуд a и b остается постоянной: $a^2 + b^2 = \text{const}$, хотя сами они меняются. На рисунке форма $p(t)$ затухает, а форма $q(t)$ нарастает. В результате волновая картина будет смещаться в сторону оси собственной формы $q(t)$. Если $\lambda > \lambda_{ид}$, волновая картина будет смещаться в сторону оси формы $p(t)$.

Существуют три способа компенсации скорости ухода, определяемой формулой (4.10):

- практически устранить расщепление частот $\Delta\omega$ с помощью динамической балансировки (с погрешностью $\Delta\omega \approx 10^{-5}$ Гц);

– доворачивать собственные оси жесткости резонатора до совмещения с текущим положением пучности стоячей волны, т.е. обеспечить условие $\vartheta \equiv 0$;

– обеспечить путем динамической настройки равенство нулю суммы фаз: $\alpha + \beta = 0$.

Рассмотрим последний способ более подробно. Выполнение условия $\alpha + \beta = 0$ достигается посредством настройки частоты опорного генератора на значение $\lambda_{ид}$ с помощью контура ФАПЧ.

Авторы патента [27] предлагают на контур ФАПЧ в качестве сигнала рассогласования подать сигнал вида

$$z_L = a \sin \alpha \operatorname{sign}(a \cos \alpha) + b \sin \beta \operatorname{sign}(b \cos \beta). \quad (4.11)$$

В связи с малостью α и β

$$z_L = |a| \alpha + |b| \beta. \quad (4.12)$$

Таким образом, контур ФАПЧ обеспечивает равенство нулю величины (4.12).

Пользуясь равенствами

$$\beta - \alpha = Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = b/a,$$

находим:

$$\alpha + \beta = Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{|\cos 2\vartheta| - |\sin 2\vartheta|}{|\cos 2\vartheta| + |\sin 2\vartheta|}. \quad (4.13)$$

Оценим величину области захвата при использовании сигнала рассогласования z_L в случае отключения системы коррекции собственных осей. Для этого решим уравнение (4.10) с учетом вращения резонатора с угловой скоростью Ω :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -K \Omega - \frac{1}{4} \Delta\omega (\alpha + \beta) \sin 4\vartheta.$$

В качестве угла ϑ выберем его значение ϑ^* , дающее максимум выражения

$$\frac{|\cos 2\vartheta| - |\sin 2\vartheta|}{|\cos 2\vartheta| + |\sin 2\vartheta|} \sin 4\vartheta.$$

В результате получим наименьшую область захвата стоячей волны:

$$\Omega_{\min} \approx 2\pi Q \frac{(\Delta f)^2}{f_0}.$$

Пусть $Q = 10^7$, $f_0 = 2,5 \cdot 10^3$ Гц, тогда при $\Delta f = 10^{-4}$ Гц имеем $\Omega_{\min} = 51,8$ град/ч, т.е. большую по величине. Поэтому необходимо наличие системы коррекции собственных осей.

Далее рассмотрим точность динамической настройки. Пусть

$$\lambda = \lambda_{\text{ид}} + \eta,$$

где η – погрешность настройки. Очевидно, что при этом

$$\alpha + \beta = \frac{2Q}{\omega_0} \eta.$$

Тогда уравнение (4.10) приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \eta \sin 4\vartheta.$$

Потребуем, чтобы значение скорости ухода не превышало значения $\dot{\vartheta}_{\max}$, тогда погрешность расстройки должна удовлетворять неравенству

$$\eta \leq \frac{2\dot{\vartheta}_{\max}}{Q \Delta\omega/\omega_0} = \frac{2\dot{\vartheta}_{\max}}{Q \Delta f/f_0}.$$

Пусть $\dot{\vartheta}_{\max} \approx 10^{-2}$ град/ч, $Q \approx 10^7$, $f_0 \approx 2,5 \cdot 10^3$ Гц, $\Delta f \approx 10^{-3}$ Гц, тогда $\eta \leq 5 \cdot 10^{-3}$ град/ч или $\eta \leq 3 \cdot 10^{-9}$ Гц.

Этот пример показывает, что даже при условии точной динамической настройки ($z_N = \alpha + \beta = 0$) необходимо использовать систему коррекции собственных осей резонатора.

Рассмотрим вопрос о структуре контура фазовой автоподстройки частоты. В качестве сигнала рассогласования на вход ФАПЧ подается сигнал

$$z_N = \alpha + \beta,$$

который практически строится следующим образом:

$$z_N \approx \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha} + \frac{b \sin \beta}{b \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta.$$

Структурная схема контура ФАПЧ показана на рис. 4.2.

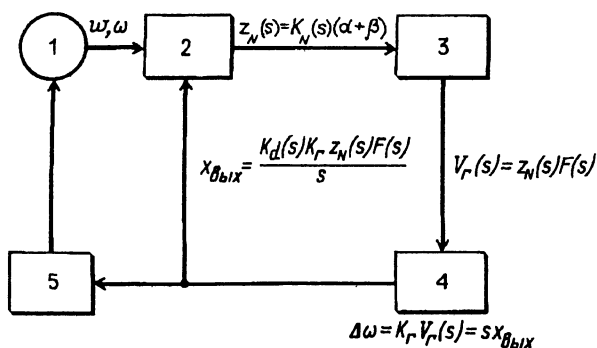


Рис. 4.2. Принципиальная схема контура ФАПЧ:

1 – резонатор; 2 – блок формирования сигнала рассогласования; 3 – низкочастотный фильтр; 4 – генератор, управляемый напряжением; 5 – кольцевой электрод

С блока формирования сигнала рассогласования (ФСР) на вход низкочастотного фильтра поступает напряжение, пропорциональное входному сигналу $x_{вх} = \alpha + \beta$. Фильтр работает в полосе частот шума и компонент высокочастотного сигнала, имеющегося на выходе ФСР. Большая полоса захвата контура требует широкой полосы фильтра. Но в то

же время для получения чистого выхода генератора управляемого напряжения (ГУН) даже при наличии большого входного шума требуется, чтобы полоса пропускания была мала. Поэтому полоса пропускания должна соответствовать максимально ожидаемой разности входной частоты и частоты ГУН.

Отфильтрованный сигнал подается на вход генератора, частота выходного сигнала которого изменяется пропорционально приложенному напряжению:

$$V_r(s) = z_N(s) F(s).$$

Выбор генератора для данного применения определяют две основные характеристики: фазовая стабильность и большой диапазон регулирования.

Передаточная функция контура ФАПЧ в этой схеме имеет вид

$$W(s) = \frac{K_r K_d(s)}{s + K_r K_d(s) F(s)}.$$

Ее порядок (наибольшая степень знаменателя) определяется порядком фильтра. Если на входе контура частота изменяется линейно, то контур 2-го порядка дает установившуюся погрешность фазы или динамическое отставание. Контур 3-го порядка приводит к нулевому динамическому отставанию, что является определенным преимуществом, но в таком контуре трудно обеспечить условия устойчивости. Для наших целей может быть использован контур 2-го порядка, так как скорости возможных отклонений частот крайне незначительны.

Фильтры лучше использовать активные. Активный фильтр, приведенный на рис. 4.3, часто называют пропорциональным плюс интегральным усилителем. Одно из преимуществ активного фильтра заключается в том, что наличие

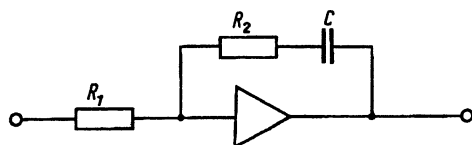


Рис. 4.3. Активный фильтр:

$$F(s) = \frac{s\tau_2 + 1}{s\tau_1}; \quad \tau_1 = CR_1; \quad \tau_2 = CR_2$$

усилителя делает коэффициент передачи контура по постоянному току очень высоким по сравнению со схемами с пассивной конфигурацией.

4.2. Принципы коррекции собственных осей жесткости резонатора ВТГ с помощью дискретных электродов

Известно (см. гл. 3), что колебания имеют вид стоячей волны, если они ориентированы вдоль одной из осей жесткости (осей, вдоль которых собственные частоты достигают своих экстремальных значений). В противном случае появляется дополнительная (квадратурная) стоячая волна, которая вызывает скорость ухода ВТГ. Для устранения квадратурной составляющей можно следить за положением собственных осей жесткости таким образом, чтобы одна из них все время совпадала с положением пучностей стоячей волны. Этот способ может быть реализован с помощью 16-электродной системы коррекции.

Схема расположения электродов показана на рис. 4.4. Окружной угол φ будем отсчитывать от оси “большей жесткости”.

Рассмотрим колебания неидеального резонатора под действием сил электрического поля, создаваемого системой дискретных электродов. Для определенности будем считать, что неидеальность резонатора состоит в зависимости модуля Юнга от угла φ :

$$E = E(\varphi) = E_0(1 + \varepsilon \cos 4\varphi).$$

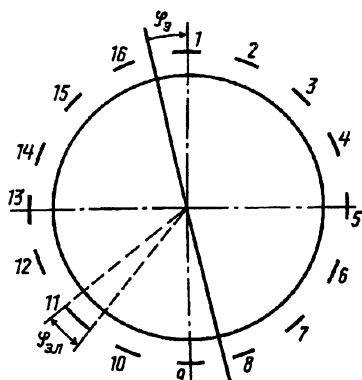


Рис. 4.4. 16-электродная система коррекции:
1 – 16 – электроды

В рамках кольцевой модели имеем уравнение

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \frac{E(\varphi) I}{\rho S R^4} (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = \frac{\varepsilon_0 L}{\rho S d_0^3} (V^2(\varphi) w)'' , \quad (4.14)$$

где $V(\varphi)$ – распределение напряжения по окружному углу.

Введем обозначение: $\varepsilon_0 L V^2(\varphi) / (\rho S d_0^3) = F(\varphi)$.

Найдем вид функции $F(\varphi)$ для электрического поля, создаваемого системой электродов, показанной на рис. 4.4.

Электроды объединены в группы по четыре:

группа I – электроды 1, 5, 9, 13;

группа II – электроды 2, 6, 10, 14;

группа III – электроды 3, 7, 11, 15;

группа IV – электроды 4, 8, 12, 16.

На группы электродов подается постоянное электрическое напряжение V_{01} , V_{02} , V_{03} , V_{04} соответственно, причем каждая группа может работать независимо от других групп.

Тогда каждая из групп создает следующее распределение напряжения по углу φ (удерживается только четвертая гармоника):

$$\begin{aligned}
V_1(\varphi) &= V_{01} \left(\frac{4}{\pi} \varphi_{\text{эл}} + \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_{\text{эл}} \cos 4(\varphi - \varphi_3) \right) + \dots; \\
V_2(\varphi) &= V_{02} \left(\frac{4}{\pi} \varphi_{\text{эл}} + \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_{\text{эл}} \sin 4(\varphi - \varphi_3) \right) + \dots; \\
V_3(\varphi) &= V_{03} \left(\frac{4}{\pi} \varphi_{\text{эл}} - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_{\text{эл}} \cos 4(\varphi - \varphi_3) \right) + \dots; \\
V_4(\varphi) &= V_{04} \left(\frac{4}{\pi} \varphi_{\text{эл}} - \frac{2}{\pi} \sin 2\varphi_{\text{эл}} \sin 4(\varphi - \varphi_3) \right) + \dots,
\end{aligned}$$

где $\varphi_{\text{эл}}$ – угловой размер электрода; φ_3 – ориентация первого электрода.

Если в распределении силы надо реализовать функцию $\cos 4(\varphi - \varphi_3)$, то напряжение подается на группу I, если нужно распределение $-\cos 4(\varphi - \varphi_3)$, напряжение подается на группу III. Для реализации распределений по законам $\sin 4(\varphi - \varphi_3)$ и $-\sin 4(\varphi - \varphi_3)$ используются группы II и IV соответственно.

В целях минимизации постоянных составляющих электрического поля, возникающих при включении электродов, группы I и III работают всегда порознь друг от друга. Аналогично работают группы II и IV.

Таким образом, с помощью групп I и III создается сила притяжения между электродами и резонатором:

$$U_1 \cos 4(\varphi - \varphi_3),$$

а с помощью групп II и IV создается сила следующего вида:

$$U_2 \sin 4(\varphi - \varphi_3).$$

Величины U_1 и U_2 могут быть как положительными, так и отрицательными.

Суммарное воздействие на резонатор по четвертой гармонике со стороны дискретных электродов будет иметь вид

$$U_1 \cos 4(\varphi - \varphi_3) + U_2 \sin 4(\varphi - \varphi_3).$$

В связи с тем что положение собственных осей, вообще говоря, не известно, угол удобнее отсчитывать от центра первого электрода: $\theta = \varphi - \varphi_3$. Угол θ будем использовать при решении задачи коррекции собственных осей.

Обобщим выражение для электрической силы

$$F(\varphi) = F_1 + F_0 \cos 4(\varphi - \varphi_F), \quad (4.15)$$

где $F > 0$ – постоянная составляющая; $F_0 > 0$ – амплитуда.

Подставляя (4.15) в (4.14), представим решение уравнения (4.14) в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2(\varphi - \varphi_0) + q(t) \sin 2(\varphi - \varphi_0).$$

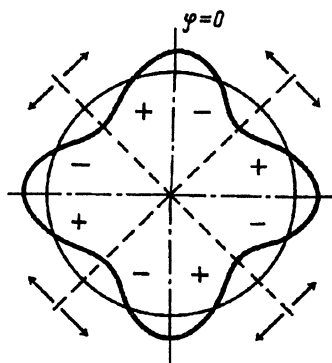
Применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{p}(t) + \left(\omega_0^2 - \frac{4}{5} F_1 \right) p(t) + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 \cos 4\varphi_0 p(t) - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 \sin 4\varphi_0 q(t) = \frac{2}{5} F_0 \cos 4(\varphi_0 - \varphi_F) p(t) - \\ - \frac{2}{5} F_0 \sin 4(\varphi_0 - \varphi_F) q(t); \\ \ddot{q}(t) + \left(\omega_0^2 - \frac{4}{5} F_1 \right) q(t) - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 \sin 4\varphi_0 p(t) - \\ - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_0^2 \cos 4\varphi_0 q(t) = -\frac{2}{5} F_0 \sin 4(\varphi_0 - \varphi_F) p(t) - \\ - \frac{2}{5} F_0 \cos 4(\varphi_0 - \varphi_F) q(t). \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Задача коррекции собственных осей ставится таким образом: найти значения F_0 и φ_F , такие, чтобы любое наперед заданное направление $\varphi = \varphi_0$ являлось собственной осью. Это означает, что уравнения системы (4.16) должны быть независимыми, т.е. в первом уравнении отсутствуют слагаемые, пропорциональные $q(t)$, а во втором уравнении нет слагаемых, пропорциональных $p(t)$. Это будет выполнено при условии

$$\varepsilon \omega_0^2 \sin 4\varphi_0 = 2K F_0 \sin \psi; \quad \psi = \varphi_0 - \varphi_F. \quad (4.17)$$

Рис. 4.5. Правило выбора направления воздействия со стороны электродов



Из формул (4.17) видно, что для любого значения ψ существует значение F_0 , такое, что направление φ_0 станет собственной осью. Чтобы сделать значение F_0 минимальным при заданном расщеплении частоты и угла φ_0 , следует взять $|\psi| = \pi/8$. Таким образом, оси четвертой гармоники результирующей силы повернуты на угол $\pi/8$ относительно направления стоячей волны. При условии $\sin 4\varphi_0 > 0$ необходимо взять $\psi = \pi/8$, а если $\sin 4\varphi_0 < 0$, то берем $\psi = -\pi/8$. Отсюда получаем правило выбора направления электрической силы (проиллюстрированное на рис. 4.5): оси гармоники напряжения смещены на угол $\pi/8$ относительно направления φ_0 (пучности стоячей волны) в сторону ближайшей к этому направлению “естественной” (т.е. без воздействия электродов) собственной оси большей жесткости (большей собственной частоты). Жирная линия на рис. 4.5 – распределение модуля Юнга, знаки “+” и “-” соответствуют знакам $\sin 4\varphi_0$ в секторах, а стрелки указывают сторону, в которую откладывается угол $22,5^\circ$ при нахождении пучности стоячей волны в этих секторах.

Отметим, что, как следует из уравнений (4.16), выбор F_0 и φ_F в соответствии с формулой (4.17) не устраняет, вообще говоря, расщепление частоты. Величина расщепления частоты после коррекции по порядку величины равна “естественному” расщеплению. Это вызывает необходимость вводить

обратную связь, корректирующую частоту опорного генератора (система ФАПЧ).

Покажем практическую реализацию условия (4.17). В реальном приборе используется информация, поступающая с каналов E_c и E_s . Для упрощения рассуждений допустим, что информация поступает с емкостных датчиков Д1 и Д2, ориентированных под углами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/4$ соответственно. Пусть $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – сигналы, поступающие с этих датчиков.

В п. 4.1 показано, что колебания резонатора, имеющего дефект по четвертой гармонике, можно представить в виде

$$w(\varphi, t) = A_0 \cos(\lambda t - \pi/4 - \alpha) \cos 2\varphi + B_0 \cos(\lambda t - \pi/4 - \beta) \sin 2\varphi. \quad (4.18)$$

Тогда функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= w_{11} \cos(\lambda t - \pi/4) + w_{12} \sin(\lambda t - \pi/4); \\ w_2(t) &= w_{21} \cos(\lambda t - \pi/4) + w_{22} \sin(\lambda t - \pi/4), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_{11} &= A_0 \cos \alpha \cos 2\varphi_1 + B_0 \cos \beta \sin 2\varphi_1; \\ w_{12} &= A_0 \sin \alpha \cos 2\varphi_1 + B_0 \sin \beta \sin 2\varphi_1; \\ w_{21} &= -A_0 \cos \alpha \sin 2\varphi_1 + B_0 \cos \beta \cos 2\varphi_1; \\ w_{22} &= -A_0 \sin \alpha \sin 2\varphi_1 + B_0 \sin \beta \cos 2\varphi_1. \end{aligned}$$

Составим определитель матрицы P для волнового процесса (4.18):

$$z \equiv \det P = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = A_0 B_0 \sin(\beta - \alpha).$$

Колебания (4.18) являются стоячей волной при выполнении условия (см. гл. 3) $z = 0$.

Это условие выполнено при выставке собственных осей вдоль осей стоячей волны. Таким образом, формируя сигнал на вход обратной связи для коррекции собственных

осей, необходимо выделить из сигналов $w_1(t)$ и $w_2(t)$ составляющие, пропорциональные $\cos(\lambda t - \pi/4)$ и $\sin(\lambda t - \pi/4)$: w_{11} , w_{12} , w_{21} , w_{22} , являющиеся медленными функциями времени, и сформировать из них функцию $z = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}$.

Следовательно, значение силы F_0 в формуле (4.17) формируется обратной связью таким образом, чтобы устранить сигнал рассогласования, т.е. обеспечить выполнение равенства $z = 0$.

Выясним вопрос о выборе знака угла ψ . Ранее установлено, что $|\psi| = \pi/8$ и откладывается этот угол в сторону ближайшей оси большей жесткости от оси волновой картины. На рис. 4.5 видно, что $z > 0$ в секторах “+” и $z < 0$ в секторах “-”. Отсюда следует, что $\psi = (\pi/8) \text{sign} z$.

Далее вместо угла φ введем угол θ , отсчитываемый от датчика Д1. Очевидно, верно соотношение $\varphi = \varphi_1 + \theta$. Тогда выражение для силы F , приложенной к резонатору со стороны системы коррекции, запишется в виде

$$F(\theta) = F_1 + F_0 \cos 4(\theta - \theta_F),$$

где $\theta_F = \theta_0 - (\pi/8) \text{sign} z$.

Отсюда следует вывод: чтобы сделать направление θ_0 собственной осью, к резонатору должно быть приложено усилие

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F_1 - F_0 \text{sign} z \sin 4(\theta - \theta_0) = \\ &= F_1 + F_0 \text{sign} z \sin 4\theta_0 \cos 4\theta - F_0 \text{sign} z \cos 4\theta_0 \sin 4\theta. \end{aligned}$$

Причем не обязательно “естественные” оси жесткости должны совпадать с осями датчиков. Более того, указанная система коррекции может функционировать независимо от системы ФАПЧ.

Из анализа работы 16-электродной системы коррекции следует, что коррекция положения собственных осей жесткости происходит с помощью распределенного по четвертой гармонике силового воздействия на резонатор, причем оси

приложения силы смещены относительно осей стоячей волны на угол $22,5^\circ$ в сторону ближайшей оси большей жесткости. Значение напряжения, подаваемого на электроды, устанавливается обратной связью, на вход которой в качестве сигнала рассогласования подается некоторая комбинация фазных и квадратурных составляющих выходных сигналов системы съема. Знак этой комбинации используется для определения направления приложения силы.

5. БАЛАНСИРОВКА РЕЗОНАТОРА ВТГ

Балансировка резонатора ВТГ является важнейшей операцией регулирования прибора, от которой во многом зависит его точность.

В этой главе изложены общие принципы балансиروчных операций, методика проведения динамической балансировки, предложен оригинальный способ идентификации параметров неоднородности распределения массы резонатора ВТГ для проведения балансировки.

5.1. Общие принципы балансировки

К механической балансировке относятся: статическая балансировка, обеспечивающая совмещение центра масс резонатора с его осью симметрии, и динамическая балансировка, связанная с устранением расщепления собственной частоты. Механическая балансировка осуществляется путем съема массы с его кромки, например, импульсным CO_2 -лазером.

К электрической относится балансировка, устраняющая остаточное расщепление частоты (после механической) и производящая доворот собственной оси жесткости до совмещения с текущим положением пучности стоячей волны.

Отметим некоторые особенности балансиروчных операций.

1. Статическая балансировка должна предшествовать динамической, в противном случае появляется дополнительное расщепление частоты. При этом величина снимаемой

массы должна быть такой, чтобы центр масс резонатора лежал на оси его симметрии с требуемой точностью после проведения балансировки.

2. Динамическая балансировка должна быть проведена таким образом, чтобы не нарушать статической. Отсюда следует условие симметрии расположения удаляемых масс на кромке резонатора.

3. Точность динамической балансировки определяется максимальным расщеплением частоты, которое можно создать путем подачи на систему корректирующих электродов допустимого постоянного напряжения, и допустимой скоростью ухода стоячей волны.

4. Минимальное остаточное расщепление частоты после проведения динамической балансировки определяется систематической составляющей скорости ухода, задаваемой техническим заданием на разработку прибора.

В гл. 3 показано, что при наличии четвертой гармоники в распределении плотности резонатора по окружному углу расщепление частоты составляет:

$$\Delta\omega = 0,5 \varepsilon_4 \omega_0,$$

где ε_4 — величина дефекта по четвертой гармонике; ω_0 — основная (резонансная) частота.

Определим величину ε_4 при различных видах распределения массы по кромке резонатора.

Пусть на кромке есть одна точечная масса (рис. 5.1, а). Функцию $\rho(\varphi)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \rho_0 + \left[\frac{1}{2\pi} \Delta\varphi + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\Delta\varphi}{2} \cos n\varphi \right] = \\ &= \rho_0 + \frac{1}{2\pi} \Delta\rho\Delta\varphi + \frac{1}{\pi} \Delta\rho\Delta\varphi (\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cos 4\varphi + \dots) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[(2\pi\rho_0 + \Delta\rho\Delta\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta\rho\Delta\varphi (\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \cos 4\varphi + \dots) \right]. \end{aligned}$$

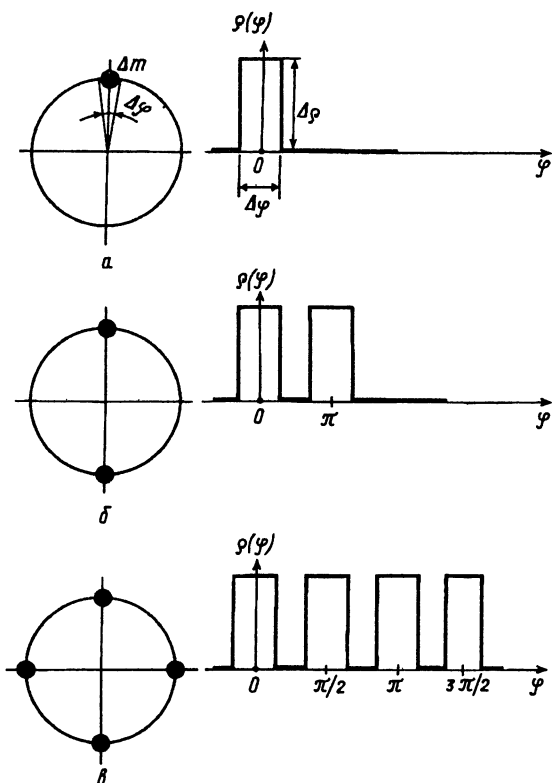


Рис. 5.1. Различные виды распределения массы резонатора по окружному углу:

a – избыточная масса; *б* – две избыточные массы; *в* – четыре избыточные массы

В полученном разложении ограничимся только четвертой гармоникой, так как именно она дает максимальное расщепление частоты. В гл. 3 показано, что остальные гармоники дают величину расщепления, пропорциональную квадрату величины дефекта.

Обозначим: $2\pi\rho_0 = m_0$ – среднее значение эквивалентной массы резонатора; $\Delta\rho\Delta\varphi = \Delta m$ – величина избыточной массы, которую необходимо удалить в процессе балансировки. Кроме того, $2\pi\rho(\varphi) = m(\varphi)$.

Тогда в новых обозначениях запишем:

$$m(\varphi) = m_0 \left[\left(1 - \frac{\Delta m}{m_0} \right) - 2 \frac{\Delta m}{m_0} (\cos \varphi + \dots + \cos 4\varphi + \dots) \right].$$

Величина $\varepsilon_4 = 2\Delta m/m_0$ характеризует изменение средней плотности резонатора и является мерой дефекта плотности по всем гармоникам.

При $\Delta m = 10^{-6}$ г, $m_0 = 15$ г (определена экспериментально для ВТГ-3 исходя из статической жесткости кромки резонатора и собственной частоты), $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^4$ с⁻¹ получаем расщепление частоты

$$\Delta f_{(1)} = \frac{\Delta \omega_{(1)}}{2\pi} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Гц.}$$

Однако такая балансировка не удовлетворяет требованиям симметрии удаляемых масс.

В случае распределения массы, показанного на рис. 5.1, б, запишем:

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[(2\pi\rho_0 + 2\Delta\rho\Delta\varphi) + \right. \\ \left. + 4\Delta\rho\Delta\varphi (\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \dots) \right],$$

или

$$m(\varphi) = m_0 \left[\left(1 + \frac{2\Delta m}{m_0} \right) + 4 \frac{\Delta m}{m_0} (\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \dots) \right].$$

Расщепление частоты определяется выражением

$$\Delta \omega_{(2)} = \frac{2\Delta m}{m_0} \omega_0.$$

Разложение Фурье для распределения массы, показанного на рис. 5.1, в, имеет вид

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[(2\pi\rho_0 + 4\Delta\rho\Delta\varphi) + 8\Delta\rho\Delta\varphi (\cos 4\varphi + \cos 8\varphi + \dots) \right],$$

или

$$m(\varphi) = m_0 \left[\left(1 + \frac{4\Delta m}{m_0} \right) + 8 \frac{\Delta m}{m_0} (\cos 4\varphi + \cos 8\varphi + \dots) \right].$$

Величина расщепления частоты определяется выражением

$$\Delta\omega_{(4)} = \frac{4\Delta m}{m_0} \omega_0.$$

Балансировочный стенд, показанный на рис. 5.2, включает в себя следующие элементы: установку содержащую технологический вакуумный блок (ТВБ) 4, блок электроники 2, блок электропривода 3, блок питания 14, лазерную установку с импульсным СО₂-лазером 6, блоком питания 11 лазера, блоком электроники 12 управления лазером, привод 13 шторки, вакуумную систему 1, состоящую из трех ступеней вакуумирования, включающую в себя форвакуумный насос 2НВР-5Д и сверхвакуумный агрегат, который, в свою очередь, имеет циолитовый насос для промежуточного вакуумирования. Вакуум в рабочей зоне ТВГ на третьей ступени вакуумирования достигает $(1,3 \dots 0,13) 10^{-4}$ Па.

В состав ТВБ входят основание, на котором установлены технологический корпус ТВГ с системами возбуждения и съема, вращающаяся опора с балансируемым резонатором, вакуумно-плотный кожух. В кожухе установлен объектив 5, позволяющий ориентировать и фокусировать луч лазера на кромку резонатора.

На вход блока электроники 8 резонатора от управляемого генератора 9 подается напряжение с частотой, кратной собственной частоте резонатора. Это вызвано необходимостью повышения точности настройки и формирования опорных импульсов 0° и 90°, подаваемых на фазные и квадратурные демодуляторы. Оконечный усилитель платы возбуждения выдает широтно-модулированные импульсы с регулируемой амплитудой до 350 В, которые через контакты реле поступают на электроды возбуждения резонатора. Реле дает возможность по команде от ЭВМ включать возбуждение.

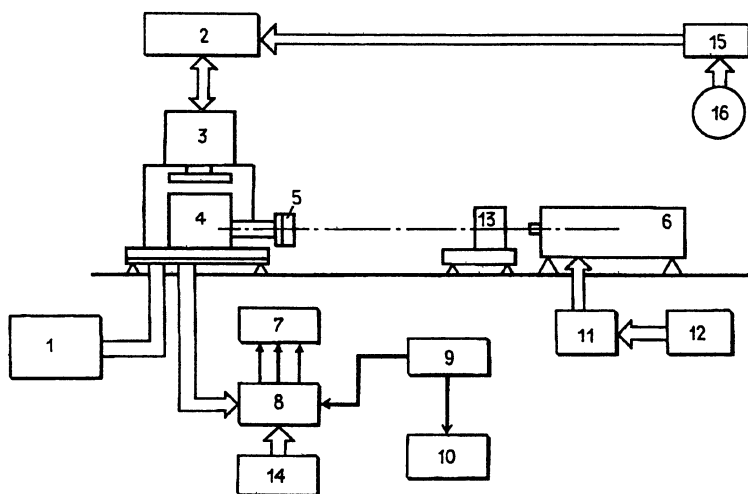


Рис. 5.2. Схема балансировочного стенда:

1 – вакуумная система; 2 – блок электроники; 3 – электропривод резонатора; 4 – технологический вакуумный блок; 5 – объектив; 6 – лазер; 7 – двухлучевой осциллограф; 8 – блок электроники резонатора; 9 – генератор; 10 – частотомер Ф5041; 11 – блок питания лазера; 12 – блок электроники управления лазером; 13 – привод шторки; 14 – блок питания; 15 – цифроаналоговый преобразователь; 16 – ЭВМ

Команды на поворот резонатора вырабатывает ЭВМ в цифровой форме. Код, соответствующий углу поворота, преобразуется в цифроаналоговом преобразователе 15 и в аналоговой форме в виде двух напряжений постоянного тока, модулированных импульсами частотой 400 Гц, через усилители поступает на указатели положения, один из которых поворачивает электропривод 3 на заданный угол.

Блок электроники 12 управления лазером по команде от ЭВМ задает режим работы лазера.

Частотомер Ф5041 10 необходим для контроля частоты генератора 9 и является источником импульсов стабильной частоты 1000 Гц, которые служат для точного счета времени при измерении добротности.

Двухлучевой осциллограф 7 имеет на одном входе опорные импульсы нулевой фазы, на другом – сигнал с одного датчика перемещения, по которому можно точно настраивать генератор возбуждения на частоту резонанса.

5.2. Электрическая балансировка

Влияние различных технологических погрешностей балансировочного стенда позволяет в настоящее время осуществить динамическую балансировку с точностью до 10^{-4} Гц, что не обеспечивает выполнение требований к этой составляющей погрешности прибора. В связи с этим возникает необходимость осуществлять электрическую балансировку в самом приборе. Электрическая балансировка основана на эффекте появления отрицательной жесткости при подаче постоянного напряжения определенной величины на отдельные электроды, которые объединены в четыре группы по четыре электрода (см. рис. 4.4).

Принцип электрической балансировки (16-электродной коррекции) обсуждался в гл. 4. Здесь оценим точность электрической балансировки, т.е. максимальное расщепление частоты, которое можно получить, подавая напряжение на отдельные электроды системы коррекции.

Разложим в ряд Фурье квадраты напряжений на корректирующих электродах (см. рис. 4.4), удерживая лишь четвертые гармоники окружного угла:

$$V_1^2(\varphi) = \frac{2V_1^2}{\pi} (2\varphi_{эл} + \sin 2\varphi_{эл} \cos 4\varphi);$$

$$V_2^2(\varphi) = \frac{2V_2^2}{\pi} (2\varphi_{эл} + \sin 2\varphi_{эл} \sin 4\varphi);$$

$$V_3^2(\varphi) = \frac{2V_3^2}{\pi} (2\varphi_{эл} - \sin 2\varphi_{эл} \cos 4\varphi);$$

$$V_4^2(\varphi) = \frac{2V_4^2}{\pi} (2\varphi_{эл} - \sin 2\varphi_{эл} \sin 4\varphi).$$

В этих выражениях учтено, что ось первого электрода совпадает с осью отсчета угла ($\varphi_3 = 0$).

Плотность нормальной силы электрического поля, приложенной к резонатору, запишем в виде

$$q(\varphi) = -\frac{\varepsilon_0 L}{\pi d_0^2 \left(1 + \frac{2w}{d_0}\right)} \left[(V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2) 2\varphi_{эл} + \right. \\ \left. + \sin 2\varphi_{эл} (V_1^2 - V_3^2) \cos 4\varphi + \sin 2\varphi_{эл} (V_2^2 - V_4^2) \sin 4\varphi \right]. \quad (5.1)$$

Рассмотрим уравнение движения идеального кольцевого резонатора на неподвижном основании:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \varkappa^2 (w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = \frac{1}{\rho S} q''(\varphi), \quad (5.2)$$

где сила $q(\varphi)$ определяется выражением (5.1).

Для оценки эффективности электрической балансировки в выражении (5.1) положим: $V_2 = V_3 = V_4 = 0$, $V_1 = V_{\max}$ — максимально возможное напряжение.

Представляя решение (5.2) в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi,$$

и применяя метод Бубнова — Галеркина, приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{36\varkappa^2}{5} \left[1 - \frac{\varepsilon_0 L}{\pi \rho S d_0^3 \varkappa^2} \left(\frac{4V_1^2}{9} \varphi_{эл} + V_1^2 \sin 2\varphi_{эл} \right) \right] p = 0; \\ \ddot{q} + \frac{36\varkappa^2}{5} \left[1 - \frac{\varepsilon_0 L}{\pi \rho S d_0^3 \varkappa^2} \left(\frac{4V_1^2}{9} \varphi_{эл} - V_1^2 \sin 2\varphi_{эл} \right) \right] q = 0. \end{cases} \quad (5.3).$$

Находя разность собственных частот системы (5.3), получаем расщепление $\Delta f_{\text{эл}}$:

$$\Delta f_{\text{эл}} = \frac{18}{5} \frac{\varepsilon_0 V_0^2}{\pi^2 \rho h d_0^3 \omega_0} \sin 2\varphi_{\text{эл}}, \quad (5.4)$$

где h – толщина резонатора.

Возьмем значения параметров: $V_{\text{max}} = 100 \text{ В}$, $\rho = 2,21 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $h = 1,7 \text{ мм}$, $d_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $\varphi_{\text{эл}} = 20^\circ$, тогда формула (5.4) дает значение расщепления $0,21 \cdot 10^{-3} \text{ Гц}$. Это означает, что первая группа электродов способна создать расщепление в идеальном резонаторе, которого достаточно, чтобы скомпенсировать оставшееся после механической балансировки расщепление частоты.

5.3. Методика определения собственных осей жесткости и расщепления частоты, основанная на снятии амплитудно-и фазочастотной характеристик

Резонаторы, прошедшие технологический цикл изготовления, напыления токопроводящего слоя, подвергаются динамической балансировке на автоматизированном балансировочном стенде. Балансировочные работы проводятся с целью устранения разбаланса, вызванного первой, второй, третьей и четвертой гармониками окружного угла неоднородности распределения массы по кромке резонатора.

Излагаемая методика позволяет идентифицировать лишь дефект по четвертой гармонике и определить соответствующее расщепление частоты. В практическом плане задача балансировки резонатора по первым трем гармоникам в настоящее время находится в стадии разработки. Актуальность решения этой задачи возросла в связи с испытаниями ВТГ и повышением требований к точности динамической балансировки.

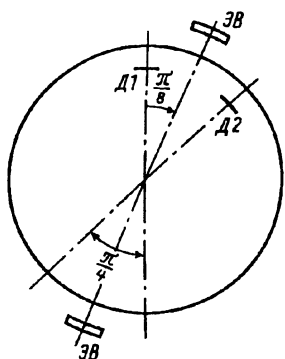


Рис. 5.3. Схема возбуждения резонатора:
Д1 и Д2 – датчики; ЭВ – электроды возбуждения

Методика основана на снятии в различных точках резонатора амплитудно- и фазочастотной характеристик (АЧХ и ФЧХ). Для этого применяется схема возбуждения и съема, показанная на рис. 5.3. Частота возбуждения меняется с шагом, примерно равным 0,001 Гц. Результат эксперимента – АЧХ и ФЧХ для двух каналов с использованием датчиков Д1 и Д2.

Значения собственных частот резонатора, имеющего дефект по четвертой гармонике, равны:

$$\omega_1 = \omega \left(1 - (1/4) \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right);$$

$$\omega_2 = \omega \left(1 + (1/4) \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right),$$

где φ_4 – ориентация четвертой гармоники (окружной угол отсчитывается от датчика Д1 по ходу часовой стрелки).

Расщепление частоты равно:

$$\Delta\omega = 0,5 \varepsilon_4 \omega \cos 4\varphi_4.$$

Отсюда следует, что кривые, полученные при разных ориентациях резонатора, обладают некоторыми особенностями. При возбуждении колебаний вдоль оси жесткости АЧХ и ФЧХ обоих каналов практически совпадают (рис. 5.4, а). Если колебания возбуждаются по биссектрисе между осями жесткости, то максимумы АЧХ и нули ФЧХ находятся на наибольшем расстоянии друг от друга, расстояние между этими точками равно расщеплению собственной (резонансной) частоты $\Delta\omega$ (рис. 5.4, в). Аналогичная картина имеет место, когда угол между осью возбуждения и собственной осью равен $67,5^\circ$, в этом случае соответствующие

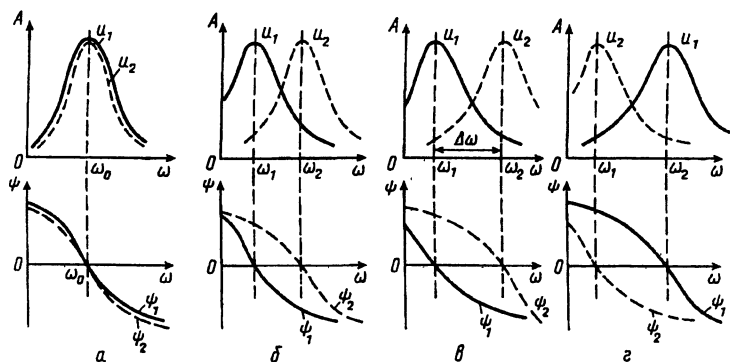


Рис. 5.4. АЧХ и ФЧХ резонатора:

а – возбуждение по оси жесткости; *б* – промежуточный вариант возбуждения; *в, г* – возбуждение по биссектрисе между осями жесткости; $\Delta\omega$ – расщепление резонансной частоты; u_1, ψ_1 и u_2, ψ_2 – каналы датчиков Д1 и Д2 соответственно

кривые поменяются местами (рис. 5.4, *г*). Промежуточный вариант – угол между осью возбуждения и собственной осью меньше $22,5^\circ$ – показан на рис. 5.4, *б*.

Вращая резонатор через $1 - 2^\circ$ и каждый раз снимая АЧХ и ФЧХ, выбирают те положения, в которых кривые либо совпадают, либо максимально разнесены, определяя таким образом ориентацию осей жесткости и величину расщепления собственной частоты.

Структурная схема алгоритма определения АЧХ и ФЧХ показана на рис. 5.5.

5.4. Методика определения расщепления частоты, обусловленного четвертой гармоникой дефекта плотности, основанная на снятии фазоугловой характеристики

Для нахождения величины расщепления собственной частоты используется перспективная схема позиционного возбуждения, показанная на рис. 5.3. Электроды возбуждения

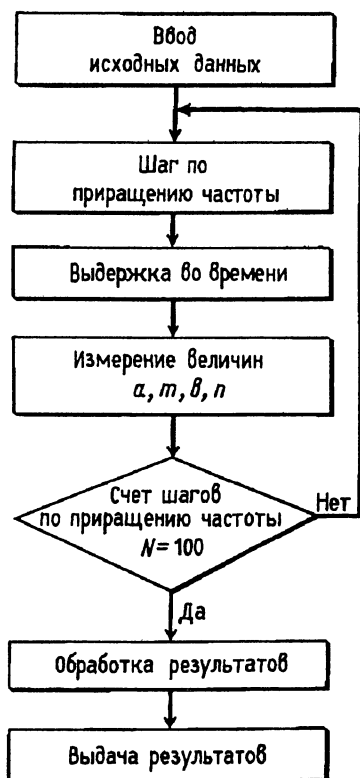


Рис. 5.5. Структурная схема алгоритма определения АЧХ и ФЧХ:

a , m – фазные составляющие сигналов датчиков Д1 и Д2; b , n – квадратурные составляющие этих же сигналов

ориентированы по биссектрисе угла между датчиками перемещения. Примем, что окружной угол отсчитывается от датчика Д1 по ходу часовой стрелки. Резонатор может вращаться в любую сторону относительно электродов возбуждения и датчиков съема.

Методика определения расщепления частоты основана на следующем свойстве четвертой гармоники дефекта. Представим четвертую гармонику неоднородности распределения

массы по окружному углу в виде

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \varepsilon_4 \cos 4(\varphi - \varphi_4) \right)$$

и рассмотрим уравнение движения кольцевой модели

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \varkappa^2 (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') \left(1 - \varepsilon_4 \cos 4(\varphi - \varphi_4) \right) + \\ + \varkappa^2 \xi (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') = H \cos 2(\varphi - \varphi_3) \cos \lambda t, \quad (5.5)$$

где φ_3 – ориентация электродов возбуждения (в нашем случае $\varphi_3 = \pi/8$); $H = \varepsilon_0 V_0^2 L \sin \varphi_{\text{эл}} / (\pi d_0^2 \rho S)$; $\varphi_{\text{эл}}$ – угловой размер электрода.

Введем обозначение: $-\frac{1}{5} H \sin 2\varphi_3 = -\frac{1}{5} H \cos 2\varphi_3 \equiv D$.

Представляя решение (5.5) в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi$$

и применяя метод Бубнова – Галеркина, приходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{p} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right) p + \\ \quad + \frac{\omega_0}{Q} \dot{p} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 q = D \cos \lambda t; \\ \ddot{q} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right) q + \\ \quad + \frac{\omega_0}{Q} \dot{q} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 p = D \cos \lambda t, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

где Q – добротность; $\omega_0^2 = 36\varkappa^2/5$.

Будем решать полученную систему (5.6) при условии $\omega_0 = \lambda$, т.е. при точной настройке на резонанс.

Функции $p(t)$ и $q(t)$ найдем в следующем виде:

$$p(t) = a \cos \lambda t + m \sin \lambda t, \quad q(t) = b \cos \lambda t + n \sin \lambda t. \quad (5.7)$$

Подставляя выражения (5.7) в систему (5.6) и приравнявая слагаемые при $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$, приходим к системе алгебраических уравнений относительно величин a, m, b, n :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 a + \frac{1}{Q} m - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 b = \frac{D}{\omega_0^2}; \\ -\frac{1}{Q} a - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 m - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 n = 0; \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 a + \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 b + \frac{1}{Q} n = \frac{D}{\omega_0^2}; \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 m - \frac{1}{Q} b + \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 n = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Очевидно, что сигналы с датчиков Д1 и Д2 имеют вид

$$w_1 = a \cos \lambda t + m \sin \lambda t;$$

$$w_2 = b \cos \lambda t + n \sin \lambda t$$

соответственно.

Преобразуем величины w_1 и w_2 следующим образом:

$$w_1 = A \cos(\lambda t - \psi_1);$$

$$w_2 = B \cos(\lambda t - \psi_2),$$

где $\operatorname{tg} \psi_1 = m/a$; $\operatorname{tg} \psi_2 = n/b$.

Исследуем изменения разности фаз $\psi_1 - \psi_2$ в зависимости от ориентации осей четвертой гармоники, т.е. от угла φ_4 . Решая систему (5.8), находим тангенсы углов ψ_1 и ψ_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_1 &= -\frac{2}{\varepsilon_4 Q (\cos 4\varphi_4 + \sin 4\varphi_4)}; \\ \operatorname{tg} \psi_2 &= \frac{2}{\varepsilon_4 Q (\cos 4\varphi_4 - \sin 4\varphi_4)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

При нахождении этих величин в решении системы (5.8) удерживались лишь слагаемые порядка ε_4 .

С помощью формул (5.9) находим тангенс разности фаз колебаний:

$$\operatorname{tg}(\psi_1 - \psi_2) = -\frac{4}{\varepsilon_4 Q} \frac{\cos 4\varphi_4}{2 \cos^2 4\varphi_4 - 1 - 4/(\varepsilon_4^2 Q^2)}. \quad (5.10)$$

Введем обозначение: $2/(\epsilon_4 Q) = A$.

Для исследования функции (5.10) найдем производную по переменной φ_4 :

$$\frac{\partial \operatorname{tg}(\psi_1 - \psi_2)}{\partial \varphi_4} = \frac{-4 \sin 4\varphi_4 (1 + A^2 + 2 \cos^2 4\varphi_4)}{(2 \cos^2 4\varphi_4 - 1 - 4/(\epsilon_4^2 Q^2))^2}. \quad (5.11)$$

Элементарный анализ выражения (5.11) показывает, что наибольшее значение, равное $-2A/(1 - A^2)$, достигается в точках $\varphi_4 = 0$, $\varphi_4 = \pi/2$, наименьшее значение (противоположное по знаку) – в точке $\varphi_4 = \pi/4$. Функция проходит через нуль в точках $\varphi_4 = \pi/8$ и $\varphi_4 = 3\pi/8$.

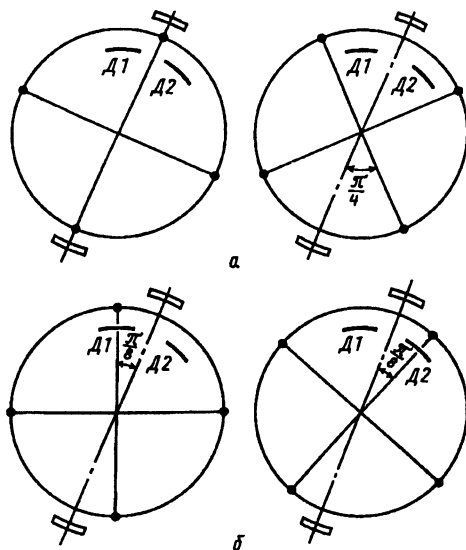


Рис. 5.6. Разность фаз четвертой гармоники (точками обозначены максимумы четвертой гармоники):

a – достижение нулевой разности фаз; *б* – наибольшая разность фаз; Д1 и Д2 – датчики перемещений

Это означает, что нулевая разность фаз достигается при ориентации одной из собственных осей жесткости вдоль оси электродов возбуждения (рис. 5.6, *a*), а наибольшее по модулю значение разности фаз достигается при ориентации элек-

тродов позиционного возбуждения по биссектрисе угла между “тяжелой” и “легкой” осями (рис. 5.6, б).

Вращая резонатор, изменяют ориентацию четвертой гармоники дефекта. При каждом повороте измеряется разность фаз сигналов с датчиков Д1 и Д2. Делая большое число поворотов резонатора, можно построить зависимость фаз от ориентации оси четвертой гармоники дефекта. Максимумы и минимумы на этой кривой определяют положение собственных осей резонатора. Далее вычисляется расщепление собственной частоты. Метод, основанный на измерении разности фаз, получил название метода фазоугловой характеристики (ФУХ).

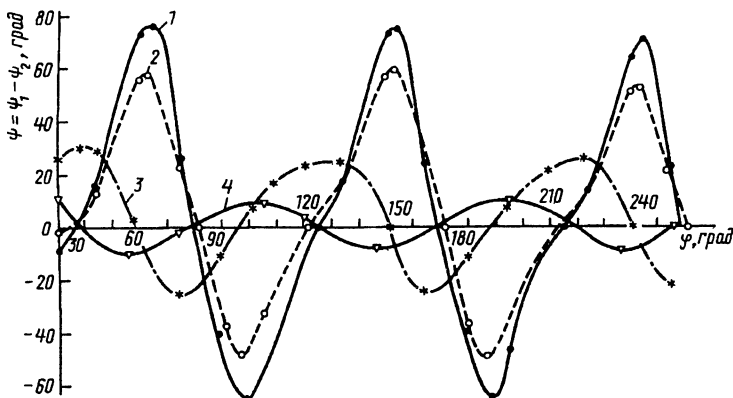


Рис. 5.7. Фазоугловая характеристика:

1 – до балансировки; 2 – после первой балансировки; 3 – после второй балансировки; 4 – после третьей балансировки

Зависимость разности фаз от угла φ_4 показана на рис. 5.7. Наибольшее по модулю значение равно:

$$|\psi_1 - \psi_2|_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{\varepsilon_4 Q}.$$

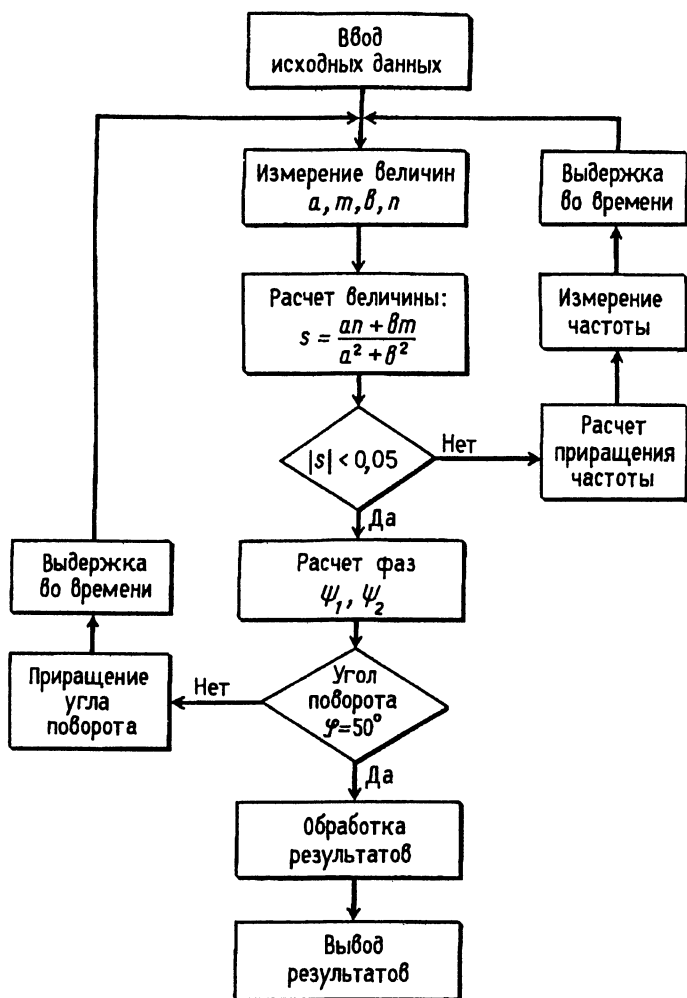


Рис. 5.8. Структурная схема методики получения фазоугловой характеристики:

a, m – фазные составляющие сигналов датчиков Д1 и Д2; b, n – квадратурные составляющие этих же сигналов

Структурная схема методики получения фазоугловой характеристики показана на рис. 5.8.

5.5. Методика идентификации первых четырех гармоник неоднородности распределения массы резонатора ВТГ

Выше были рассмотрены методики идентификации и балансировки четвертой гармоники неоднородности распределения массы резонатора: методика, основанная на снятии АЧХ и ФЧХ, методика, основанная на снятии ФУХ. Балансировка четвертой гармоники имеет большое значение для повышения точности прибора, так как она дает наибольшее расщепление частоты, а следовательно, наибольшую скорость ухода ВТГ. Однако при исследовании ВТГ на вибрирующем основании (см. гл. 3) установлено, что на показания прибора оказывают влияние первая, вторая и третья гармоники дефекта плотности. Поэтому их идентификация имеет большое практическое значение. Балансировка этих гармоник позволит применять гироскоп в условиях вибраций, сохраняя при этом точность прибора [15].

При анализе влияния неоднородности плотности резонатора на динамику ВТГ возьмем разложение в ряд Фурье по окружному углу функции плотности, в котором удерживаются первые четыре гармоники:

$$\rho(\varphi) = \rho_0 \left(1 + \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k \cos k(\varphi - \varphi_k) \right),$$

где φ_k – ориентация k -й гармоники относительно некоторой оси; ε_k – относительная величина дефекта по k -й гармонике.

Задача идентификации состоит в том, чтобы определить величины ε_k , φ_k , $k = 1, \dots, 4$. Таким образом, мы имеем восемь неизвестных параметров.

Возьмем уравнение движения кольцевого резонатора с переменной плотностью [22]:

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} + \left(\frac{\rho' \ddot{w}}{\rho} \right)' + \\ + \frac{EI}{\rho S R^4} (w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') - \frac{EI}{\rho^2 S R^4} \rho' (w^{\text{V}} + 2w''' + w') + \\ + \frac{EI}{\rho S R^4} \xi (\dot{w}^{\text{VI}} + 2\dot{w}^{\text{IV}} + \dot{w}'') = \frac{Q''}{\rho S}, \quad (5.12) \end{aligned}$$

где Q_n — нормальная сила, отнесенная к единице средней линии кольца, которая в условиях позиционного возбуждения резонатора, показанного на рис. 5.3, имеет вид [10]

$$Q_n = -\frac{\varepsilon_0 L}{2d_0^2} \cos^2 \frac{\lambda}{2} t \cos^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{8} \right).$$

Решая уравнение (5.12), учтем тот факт, что наряду с основной формой колебаний в резонаторе возбуждается ряд побочных форм, из которых наибольший интерес представляет первая, или маятниковая, форма, появление которой вызвано тем, что ножка резонатора ВТГ имеет конечную жесткость и совершает изгибные колебания [18].

Решения уравнения (5.12) представим в виде суммы основной и маятниковой собственных форм:

$$w(\varphi, t) = \sum_{i=1}^2 p_i(t) \cos i\varphi + q_i t \sin i\varphi. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в (5.12) и применяя метод Бубнова — Галеркина, приходим к системе дифференциальных уравнений для функций $p_i(t)$ и $q_i(t)$:

$$\begin{aligned} & \ddot{p}_1(-2 + \varepsilon_2 \cos 2\varphi_2 + \varepsilon_2 \sin 2\varphi_2) - 2\omega_1^2 \xi_1 \dot{p}_1 - 2\omega_1^2 p_1 + \\ & + \ddot{p}_2 \left(3\varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 + \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \right) + \\ & + \frac{5}{4} \omega_0^2 p_2 (\varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3) + \ddot{q}_1 (\varepsilon_2 \sin 2\varphi_2 - \varepsilon_2 \cos 2\varphi_2) + \\ & + \ddot{q}_2 \left(-3\varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 - \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 \right) + \\ & + \frac{5}{4} \omega_0^2 q_2 (\varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3) = \\ & = -\frac{R\sqrt{2}}{8} \cos \lambda t (\varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 + \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3); \\ & \ddot{p}_1 (\varepsilon_2 \sin 2\varphi_2 - \varepsilon_2 \cos 2\varphi_2) + \ddot{p}_2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3) - \frac{5}{4} \omega_0^2 p_2 (\varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3) + \\
& + \ddot{q}_1 (-2 - \varepsilon_2 \cos 2\varphi_2 - \varepsilon_2 \sin 2\varphi_2) - 2\omega_1^2 \xi_1 \dot{q}_1 - 2\omega_1^2 q_1 + \\
& + \ddot{q}_2 \left(-\varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + 3\varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \right) + \\
& + \frac{5}{4} \omega_0^2 q_2 (\varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3) = \frac{R\sqrt{2}}{8} \cos \lambda t (-\varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \\
& + \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 - \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3); \\
& \ddot{p}_1 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \right) + \\
& + \ddot{p}_2 (-5 + 4\varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 + 2\varepsilon_4 \sin 4\varphi_4) - 5\omega_0^2 \xi \dot{p}_2 + \\
& + 5\omega_0^2 p_2 \left(-1 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right) + \ddot{q}_1 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \right. \\
& - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \Big) + \tag{5.14} \\
& + \ddot{q}_2 (-2\varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 - 4\varepsilon_4 \sin 4\varphi_4) - \frac{5}{2} \omega_0^2 \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 q_2 = \\
& = \frac{R\sqrt{2}}{4} \cos \lambda t \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 \right); \\
& \ddot{p}_1 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 + \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \right) + \\
& + \ddot{p}_2 (-2\varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 + 4\varepsilon_4 \sin 4\varphi_4) - \frac{5}{2} \omega_0^2 \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 p_2 + \\
& + \ddot{q}_1 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \sin \varphi_1 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \cos 3\varphi_3 - \frac{3}{2} \varepsilon_3 \sin 3\varphi_3 \right) + \\
& + \ddot{q}_2 (-5 + 4\varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 - 2\varepsilon_4 \sin 4\varphi_4) - 5\omega_0^2 \xi \dot{q}_2 + \\
& + 5\omega_0^2 q_2 \left(-1 + \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 \right) = \\
& = \frac{R\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_4 \cos 4\varphi_4 - \frac{1}{2} \varepsilon_4 \sin 4\varphi_4 \right) \cos \lambda t,
\end{aligned}$$

где $R = \varepsilon_0 L V_0^2 / (\rho_0 S d_0^2)$ – амплитуда возбуждающей силы; λ – частота возбуждающей силы; ω_0 – собственная частота основной формы; ω_1 – собственная частота маятниковой формы; ξ – коэффициент затухания основной формы; ξ_1 – ко-

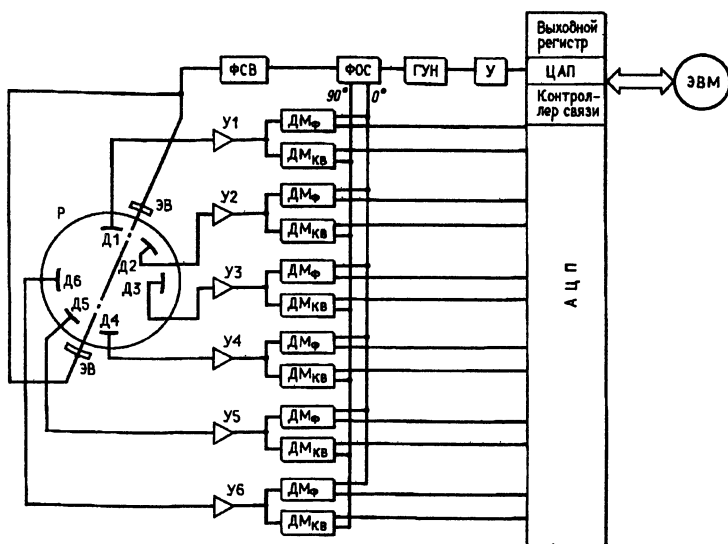


Рис. 5.9. Схема возбуждения резонатора:

Р – резонатор; Д1 – Д6 – датчики системы съема; ЭВ – электроды возбуждения; У1 – У6 – усилители сигналов датчиков съема; У – усилитель аналогового сигнала; ФОС – формирователь опорного сигнала; ФСВ – формирователь сигнала возбуждения; ГУН – генератор, управляемый напряжением; ДМФ – демодулятор фазовый; ДМКВ – демодулятор квадратурный; ЦАП – цифроаналоговый преобразователь; АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ЭВМ – электронно-вычислительная машина

эффицент затухания маятниковой формы. Принципиальная схема возбуждения и съема показана на рис. 5.9.

Усиленные сигналы с шести датчиков поступают на платы демодуляторов, где сигнал каждого датчика делится на две составляющие, одна из которых находится в фазе с опорным сигналом (который формируется в блоке ФОС), а другая находится в квадратуре (т.е. сдвинута по фазе на 90°) относительно этого сигнала. Опорный сигнал, как правило, совпадает с сигналом возбуждения по фазе. Демодулированные сигналы, преобразуясь в блоке АЦП в электронные коды, через контроллер связи поступают в ЭВМ,

где происходит обработка сигналов и вывод результатов на дисплей. В ЭВМ также вырабатываются команды управления частотой возбуждения, которые, будучи преобразованы в аналоговую форму в блоке ЦАП и усилены усилителем, подаются на вход блока ГУН, изменяющего частоту импульсов возбуждения в соответствии с входным напряжением.

Используем систему (5.14) для идентификации параметров гармоник дефекта плотности следующим образом.

Представим функции $p_i(t)$ и $q_i(t)$ в виде

$$\begin{aligned} p_i(t) &= a_i \cos \lambda t + m_i \sin \lambda t; \\ q_i(t) &= b_i \cos \lambda t + n_i \sin \lambda t. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в уравнения (5.14) и приравнивая выражения при $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$ в каждом уравнении, приходим к системе из восьми алгебраических уравнений относительно величин a_i, m_i, b_i, n_i . Эту систему можно рассматривать как линейную относительно неизвестных следующего вида: $x_{2i-1} = \varepsilon_i \cos i\varphi_i, x_{2i} = \varepsilon_i \sin i\varphi_i, i = 1, 2, 3, 4$, и ее можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{A}(a_i, m_i, b_i, n_i) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}(a_i, m_i, b_i, n_i), \quad (5.16)$$

где \mathbf{A} – матрица 8×8 ; \mathbf{F} – вектор 8×1 ; \mathbf{X} – вектор неизвестных 8×1 . Компоненты матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{F} выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} - \lambda^2 \right) + b_2 \frac{\lambda^2}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\ A_{12} &= -a_2 \frac{\lambda^2}{2} + b_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} + \lambda^2 \right) + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\ A_{13} &= (b_1 - a_1) \lambda^2; \quad A_{14} = -(a_1 + b_1) \lambda^2; \\ A_{15} &= a_2 \left(-3\lambda^2 + \frac{5\omega_0^2}{4} \right) + \frac{3}{2} b_2 \lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\ A_{16} &= -\frac{3}{2} a_2 \lambda^2 + b_2 \left(3\lambda^2 + \frac{5\omega_0^2}{4} \right) + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \quad A_{17} = A_{18} = 0; \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= 2a_1(\omega_1^2 - \lambda^2) + 2m_1\omega_1^2\xi_1\lambda; \\
A_{21} &= a_2\left(\frac{5\omega_0^2}{4} - \frac{1}{2}\lambda^2\right) + b_2\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
A_{22} &= a_2\left(\frac{5\omega_0^2}{4} + \lambda^2\right) - b_2\frac{\lambda^2}{2} - \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
A_{23} &= (a_1 + b_1)\lambda^2; \quad A_{24} = (b_1 - a_1)\lambda^2; \\
A_{25} &= \frac{3}{2}a_2\lambda^2 + b_2\left(-\frac{5\omega_0^2}{4} - 3\lambda^2\right) - \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
A_{26} &= a_2\left(\frac{5\omega_0^2}{4} - 3\lambda^2\right) + \frac{3}{2}b_2\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \quad A_{27} = A_{28} = 0; \\
F_2 &= 2b_1(\omega_1^2 - \lambda^2) + 2n_1\omega_1^2\xi_1\lambda; \\
A_{31} &= \frac{1}{2}(a_1 - b_1)\lambda^2; \quad A_{32} = \frac{1}{2}(-a_1 - b_1)\lambda^2; \\
A_{33} &= A_{34} = 0; \quad A_{35} = \frac{3}{2}(-a_1 + b_1)\lambda^2; \\
A_{36} &= \frac{3}{2}(-a_1 + b_1)\lambda^2; \quad A_{37} = (-4a_2 + 2b_2)\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
A_{38} &= (-2a_2 + 4b_2)\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
F_3 &= 5a_2(\omega_0^2 - \lambda^2) + 5m_2\omega_0^2\xi\lambda + \frac{R\sqrt{2}}{4}; \\
A_{41} &= \frac{1}{2}(a_1 + b_1)\lambda^2; \quad A_{42} = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)\lambda^2; \quad A_{43} = A_{44} = 0; \\
A_{45} &= \frac{3}{2}(a_1 + b_1)\lambda^2; \quad A_{46} = \frac{3}{2}(-a_1 + b_1)\lambda^2; \\
A_{47} &= (2a_2 - 4b_2)\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \quad A_{48} = (-4a_2 + 2b_2)\lambda^2 + \frac{R\sqrt{2}}{8}; \\
F_4 &= 5b_2(\omega_0^2 - \lambda^2) + 5n_2\omega_0^2\xi\lambda + \frac{R\sqrt{2}}{4}; \\
A_{51} &= m_2\left(\frac{5\omega_0^2}{4} - \lambda^2\right) + \frac{1}{2}n_2\lambda^2;
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
A_{52} &= n_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} + \lambda^2 \right) - \frac{1}{2} m_2 \lambda^2; \\
A_{53} &= (-m_1 + n_1) \lambda^2; \quad A_{54} = (-m_1 - n_1) \lambda^2; \\
A_{55} &= m_2 \left(-\frac{5\omega_0^2}{4} - 3\lambda^2 \right) + \frac{3}{2} n_2 \lambda^2; \\
A_{56} &= -\frac{3}{2} m_2 \lambda^2 + n_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} + 3\lambda^2 \right); \quad A_{57} = A_{58} = 0; \\
F_5 &= 2m_1(\omega_1^2 - \lambda^2) - 2a_1\omega_1^2\xi_1\lambda; \\
A_{61} &= m_2 \left(-\frac{5\omega_0^2}{4} - \frac{1}{2} \lambda^2 \right) + n_2 \lambda^2; \\
A_{62} &= m_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} + \lambda^2 \right) - \frac{1}{2} n_2 \lambda^2; \\
A_{63} &= (m_1 + n_1) \lambda^2; \quad A_{64} = (-m_1 + n_1) \lambda^2; \\
A_{65} &= \frac{3}{2} m_2 \lambda^2 + n_2 \left(-\frac{5\omega_0^2}{4} - 3\lambda^2 \right); \\
A_{66} &= m_2 \left(\frac{5\omega_0^2}{4} - 3\lambda^2 \right) + \frac{3}{2} n_2 \lambda^2; \quad A_{67} = A_{68} = 0; \\
F_6 &= 2n_1(\omega_1^2 - \lambda^2) - 2b_1\omega_1^2\xi_1\lambda; \\
A_{71} &= \frac{1}{2} (m_1 - n_1) \lambda^2; \quad A_{72} = \frac{1}{2} (-m_1 - n_1) \lambda^2; \\
A_{73} &= A_{74} = 0; \\
A_{75} &= \frac{3}{2} (-m_1 + n_1) \lambda^2; \quad A_{76} = \frac{3}{2} (-m_1 - n_1) \lambda^2; \\
A_{77} &= (-4m_2 + 2n_2) \lambda^2; \\
A_{78} &= (-2m_2 + 4n_2) \lambda^2 - n_2 \frac{5\omega_0^2}{2}; \\
F_7 &= 5m_2(\omega_0^2 - \lambda^2) - 5a_2\omega_0^2\xi\lambda; \\
A_{81} &= \frac{1}{2} (m_1 + n_1) \lambda^2; \quad A_{82} = \frac{1}{2} (m_1 - n_1) \lambda^2; \\
A_{83} &= A_{84} = 0; \quad A_{85} = \frac{3}{2} (m_1 + n_1) \lambda^2;
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
 A_{86} &= \frac{3}{2}(-m_1 + n_1)\lambda^2; & A_{87} &= (2m_2 - 4n_2)\lambda^2; \\
 A_{88} &= (-4m_2 + 2n_2)\lambda^2 - \frac{5}{2}m_2\omega_0^2; \\
 F_8 &= 5n_2(\omega_0^2 - \lambda^2) - 5b_2\omega_0^2\xi\lambda.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Величины a_i, m_i, b_i, n_i в системе (5.16) следует считать известными. Определить их можно таким образом. Зная сигналы с шести датчиков Д1 – Д6, найдем величину перемещения (5.13) в шести точках $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/4, \varphi_3 = \pi/2, \varphi_4 = \pi, \varphi_5 = 5\pi/4, \varphi_6 = 3\pi/2$. Перемещение в каждой из этих точек запишем в виде

$$\begin{aligned}
 w(\varphi_4, t) &= \sum_{i=1}^2 (a_i \cos \lambda t + m_i \sin \lambda t) \cos i\varphi_4 + \\
 &+ (b_i \cos \lambda t + n_i \sin \lambda t) \sin i\varphi_4, \quad n = 1, \dots, 6.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Далее, проводя демодуляцию сигналов (5.18), используя опорные сигналы демодулятора $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$, находим величины a_i, m_i, b_i, n_i :

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2}(w_{1c} - w_{4c}); & b_1 &= \frac{1}{2}(w_{3c} - w_{6c}); \\
 a_2 &= \frac{1}{2}(w_{1c} + w_{4c}); & b_2 &= \frac{1}{2}(w_{2c} + w_{5c}); \\
 m_1 &= \frac{1}{2}(w_{1s} - w_{4s}); & n_1 &= \frac{1}{2}(w_{3s} - w_{6s}); \\
 m_2 &= \frac{1}{2}(w_{1s} + w_{4s}); & n_2 &= \frac{1}{2}(w_{2s} + w_{5s}),
 \end{aligned}$$

где w_{ic}, w_{is} – соответственно фазная и квадратурная составляющие левой части (5.18) после демодуляции.

Таким образом, матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{F} в системе (5.16) известны, их компоненты определяются по формулам (5.17). Решая систему (5.16), находим амплитуды и углы ориентации гармоник в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_i = \sqrt{x_{2i}^2 + x_{2i-1}^2}; \\ \varphi_i = \frac{1}{i} \arctg \frac{x_{2i}}{x_{2i-1}}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \tag{5.19}$$

С помощью формул (5.19) задача идентификации параметров неоднородности распределения массы по кромке резонатора ВТГ полностью решается. После определения ориентации четырех гармоник проводится балансировка. Балансировка резонатора по гармонике с номером k состоит в удалении массы с кромки резонатора в точках $\varphi = \varphi_k + 2\pi n/k$, $n = 0, \dots, k-1$, т.е. в точках наибольшей концентрации массы k -й гармоники. Величина снимаемой массы рассчитывается с помощью параметра ε_k – относительного дефекта массы по k -й гармонике, который равен отношению избытка массы в точках максимума k -й гармоники к некоторой фиксированной массе (можно принять ее равной массе всего резонатора).

После проведения балансировочных операций в распределении массы по окружному углу будут отсутствовать первые четыре гармоники, поэтому скорость ухода ВТГ, вызванная этими гармониками, будет скомпенсирована.

Структурная схема алгоритма идентификации первых четырех гармоник неоднородности распределения массы резонатора приведена на рис. 5.10.

5.6. Результаты испытаний ВТГ

С целью проверки методики балансировки проведены испытания макетных образцов ВТГ. Испытаниям подвергались образцы ВТГ с диаметром резонатора 50 мм, добротностью $(5 \dots 9, 5) 10^6$ и собственной частотой $(2, 5 \dots 3) 10^3$ Гц.

Стабилизация амплитуды колебаний резонатора, частоты параметрического возбуждения, управления осями жесткости осуществлялась с помощью алгоритмов, электронных систем, компьютера, встроенных в стенд полунатурного моделирования. Алгоритмы разработаны в АО РПКБ (авторы А.И. Повторайко, В.И. Липатников).

Цикл измерений, обработки информации и управления прибором осуществлялся с тактовой частотой около 100 Гц и

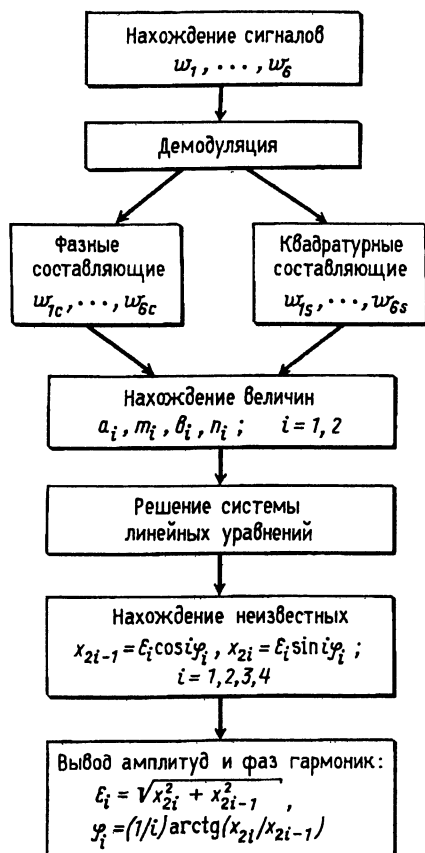


Рис. 5.10. Структурная схема алгоритма идентификации первых четырех гармоник неоднородности распределения массы резонатора

точностью измерения угла поворота стоячей волны по выходу с АЦП $0,01^\circ$.

Проводили шестичасовые запуски с записью в память 20000 результатов измерений и получили зависимость углового положения стоячей волны от времени $\vartheta = \vartheta(t)$. Затем строили зависимость систематической составляющей скорости дрейфа как производную угла поворота $d\vartheta(t)/dt$.

Предварительно в конце каждого запуска проводили оценку среднего значения систематической составляющей скорости дрейфа как $(\vartheta_k - \vartheta_0)/t$, где ϑ_k , ϑ_0 – конечное и начальное значения углов положения стоячей волны, t время ее эволюции.

Испытанные по такой методике все приборы с учетом вращения Земли имели интегральный систематический уход в пределах $0,4 \dots 0,5$ град/ч.

С целью идентификации параметров модели скорости ухода (дрейфа) ВТГ разработана модель выходного сигнала ВТГ с достаточно хорошим приближением (авторы В.И. Манохин, С.М. Габбасов, В.И. Липатников, В.А. Матвеев):

$$\dot{\vartheta} = -K\Omega + \Omega_0 + \Omega_e + \Omega_m \sin 4(\vartheta - \varphi_0) + W,$$

где K – масштабный коэффициент; Ω – измеряемая входная угловая скорость (полезный сигнал); Ω_0 – постоянная составляющая; Ω_m – амплитудное значение; φ_0 – положение оси с максимальной добротностью (Ω_0 , Ω_m , φ_0 – параметры, подлежащие идентификации, имеющие характер постоянных случайных величин с нулевым средним значением и известной дисперсией); W – случайная составляющая ухода типа нормального шума; Ω_e – тепловая составляющая ухода, также подлежащая идентификации ($\dot{\Omega}_e = -\Omega_{e0}/T$).

Постоянная времени T тепловой составляющей для конкретной реализации принимается в виде ряда фиксированных значений T_1, T_2, \dots, T_i . Ее наилучшее приближение определяется на множестве T_i как результат идентификации, наиболее точно воспроизводящей исходную реализацию $\vartheta = \vartheta(t)$.

Приведенная модель скорости дрейфа ВТГ не является исчерпывающей. Это базовая модель выходного сигнала, которую путем последовательного поэтапного усложнения можно довести до вида, обеспечивающего высокую точность определения характеристик ВТГ.

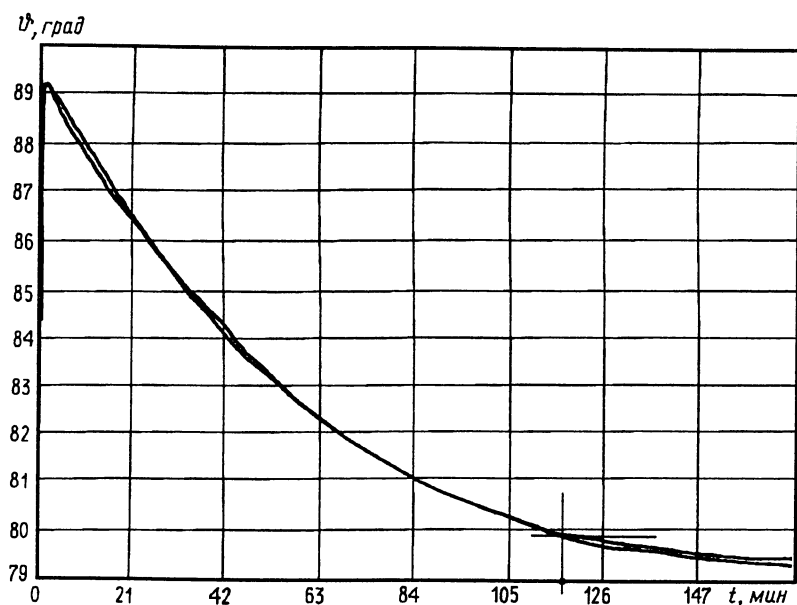


Рис. 5.11. Экспериментальная зависимость ϑ от времени

Результаты идентификации параметров модели скорости дрейфа одного из приборов разработки АО РПКБ показаны на рис. 5.11 – 5.16.

При определении масштабного коэффициента K производили по 3,5 оборота корпуса прибора по ходу и против хода часовой стрелки, через каждые 30° поворота корпуса замеряли текущий угол ϑ_i поворота стоячей волны. Эксперимент проводили с полным поворотом волны (на 360°) как по ходу часовой стрелки, так и против него. На каждом угловом диапазоне определяли значение K , которое рассчитывали как $K_i = \vartheta_i / 30^\circ$. Затем находили среднее значение масштабного коэффициента и его нестабильность.

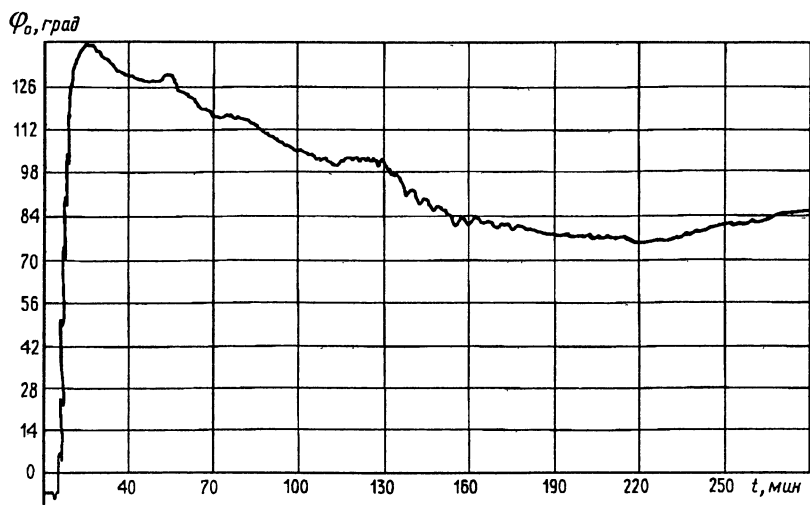


Рис. 5.12. Экспериментальная зависимость φ_0 от времени

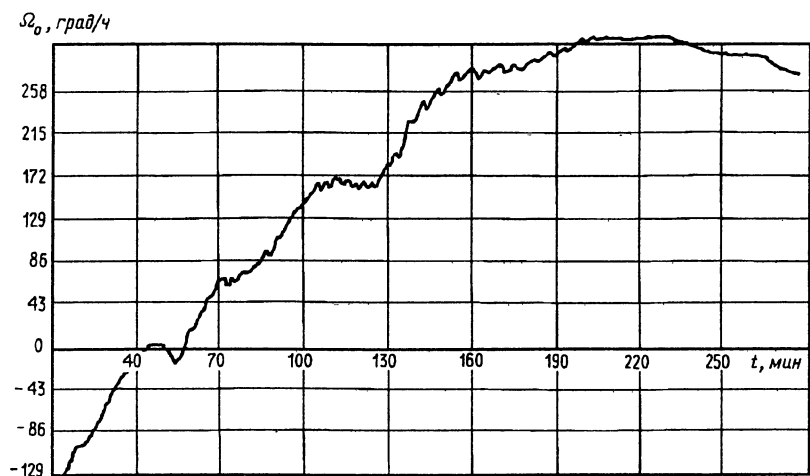


Рис. 5.13. Экспериментальная зависимость Ω_0 от времени

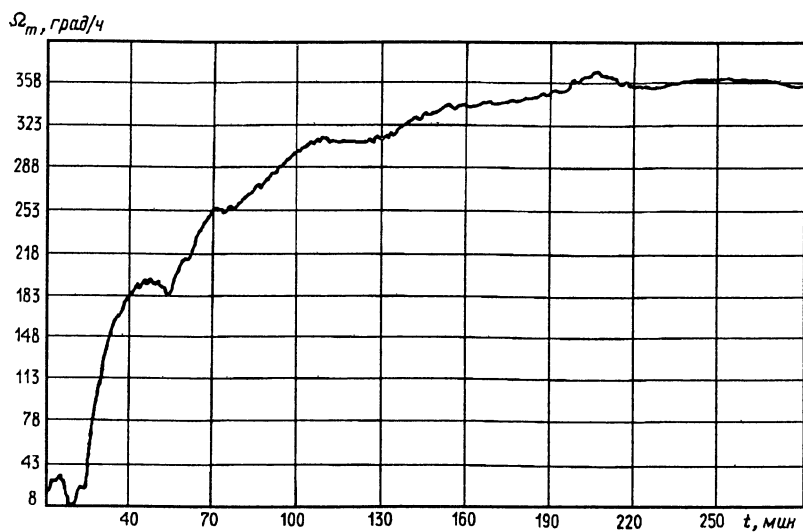


Рис. 5.14. Экспериментальная зависимость Ω_m от времени

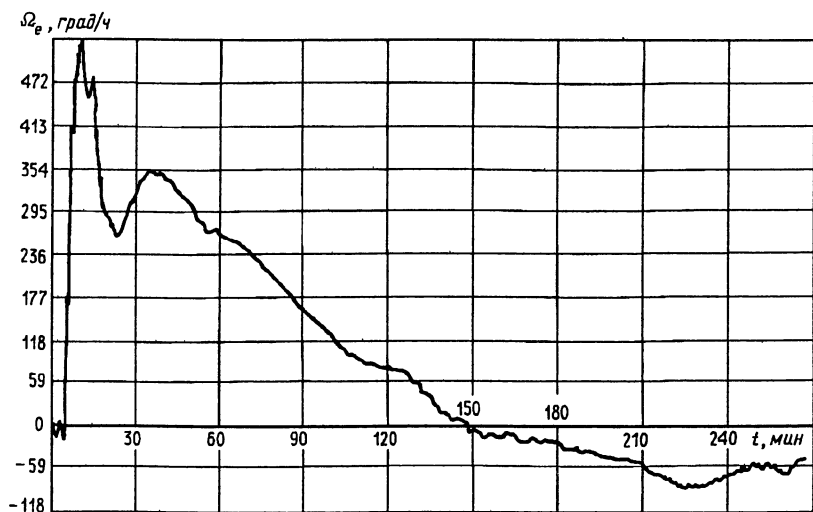


Рис. 5.15. Экспериментальная зависимость Ω_e от времени

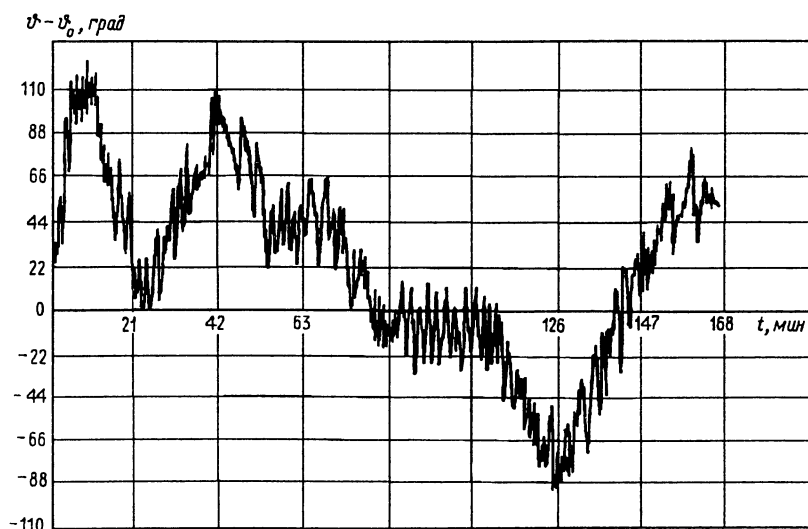


Рис. 5.16. Экспериментальная зависимость $\vartheta - \vartheta_0$ от времени

Полученные средние значения K на партии приборов составили $0,293 \dots 0,295$ при нестабильности σ , равной $0,002 \dots 0,004$, что довольно близко к теоретическому значению. В целом испытания подтвердили эффективность рассматриваемых выше методик балансировки ВТГ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Вывод уравнения движения кольцевого резонатора

Напряжения в брус при изгибе и энергия изгиба.

Для исследования напряженного состояния бруса при изгибе примем гипотезу плоских сечений: множество точек, лежащих в плоскости поперечного сечения бруса до изгиба, образует плоскость и после изгиба.

Деформация изгиба есть результат поворота плоских поперечных сечений относительно друг друга. Рассмотрим два смежных сечения, находящихся на расстоянии dz одно от другого (рис. П.1). После деформации правое сечение повернется на угол $d\theta$ относительно левого. При этом верхние слои удлинятся, а нижние — укоротятся. Слой, в котором удлинения отсутствуют, назовем нейтральным и обозначим отрезком CD . Произвольно взятый отрезок AB получит приращение длины $A_1B_1 - AB$. Поскольку сечения остаются плоскими,

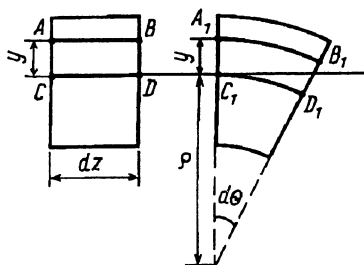


Рис. П.1. Деформация изгиба

$$A_1B_1 - AB = (\rho + y) d\theta - \rho d\theta = y d\theta,$$

где y — расстояние от отрезка AB до нейтрального слоя CD ;
 ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

Кривизной нейтрального слоя называется величина

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz}.$$

Деформация слоя AB равна:

$$\varepsilon = y \frac{d\theta}{dz} = \frac{y}{\rho}. \quad (\text{П.1})$$

По закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}. \quad (\text{П.2})$$

Таким образом, напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону. Множество точек в сечении, удовлетворяющих условию $\sigma = 0$, называется нейтральной линией сечения.

Далее, свяжем напряжение σ с внутренними силовыми факторами, возникающими в поперечном сечении бруса при изгибе.

Сумма элементарных сил σds (рис. П.2) дает нормальную силу N в сечении. Но при изгибе $N = 0$. Это означает, что

$$N = \int_S \sigma ds = 0,$$

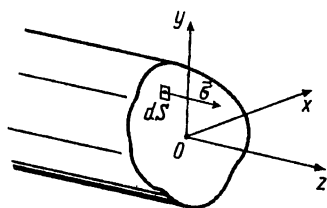


Рис. П.2. К определению напряжений в сечении бруса

или, согласно выражению (П.2),

$$\int_S y ds = 0.$$

Из последней формулы следует, что нейтральная линия проходит через центры масс сечения бруса. Таким образом,

координата y в выражениях (П.1) и (П.2) определена: она отсчитывается от линии, проходящей через множество центров масс поперечных сечений бруса.

Введем локальную систему осей, связанную с сечением бруса. Начало координат O совпадает с центром масс сечения, ось Oz направим по нормали к сечению, ось Ox – по нейтральной линии, а ось Oy ортогональна осям Ox и Oz , образуя с ними левую тройку (см. рис. П.2). Эта система осей подвижна, ее положение меняется в пространстве при переходе от одного сечения к другому.

Изгибающий момент в поперечном сечении бруса, как и нормальную силу, можно выразить через напряжение σ :

$$M_y = \int_S \sigma x \, ds, \quad M_x = \int_S \sigma y \, ds. \quad (\text{П.3})$$

Мы ограничимся рассмотрением лишь прямого изгиба, т.е. такого случая, когда плоскость изгибающего момента совпадает с плоскостью изгиба. Тогда момент относительно оси Oy равен нулю, а относительно оси Ox – полному изгибающему моменту M :

$$\frac{E}{\rho} \int_S xy \, ds = 0, \quad \frac{E}{\rho} \int_S y^2 \, ds = M. \quad (\text{П.4})$$

Первое из выражений (П.4) означает, что изменение кривизны бруса происходит в плоскости момента в том случае, если плоскость момента проходит через одну из главных осей сечения.

Второе выражение дает зависимость изгибающего момента от радиуса кривизны ρ :

$$M = EI/\rho, \quad (\text{П.5})$$

где I – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, ортогональной плоскости изгибающего момента.

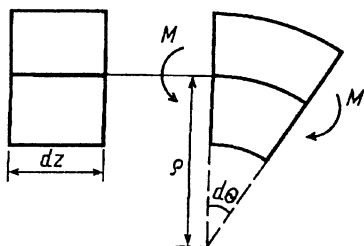


Рис. П.3. Действие изгибающего момента

Величина EI называется жесткостью бруса при изгибе.

Энергия упругих деформаций бруса при изгибе определяется работой момента M на относительном угловом перемещении $d\theta$ двух близких сечений (рис. П.3):

$$dU = \frac{1}{2} M d\theta.$$

Это выражение определяет энергию элемента бруса, показанного на рис. П.3. Двойка в знаменателе является следствием того, что упругий момент линейно выражается через угловое перемещение (в силу закона Гука).

С помощью формулы (П.5) можно связать потенциальную энергию деформаций с изменением кривизны k нейтрального слоя бруса:

$$dU = \frac{1}{2} \frac{EI}{\rho^2} dz = \frac{1}{2} EI k^2 dz \quad (\text{П.6})$$

(учтено, что $d\theta = dz/\rho$).

Выражение (П.6) можно применять для нахождения потенциальной энергии бруса любой формы, для этого необходимо найти соответствующую кривизну нейтрального слоя.

Кривизна упругого нерастяжимого кольца. Рассмотрим деформацию кругового кольца в своей плоскости. На рис. П.4 показан элемент MN , который после деформации перешел в положение M_1N_1 . Радиальные перемещения частиц кольца обозначим через w , касательные – через v . Пусть угол поворота касательной по отношению к оси кольца равен θ . Изменение кривизны оси кольца при изгибе равно

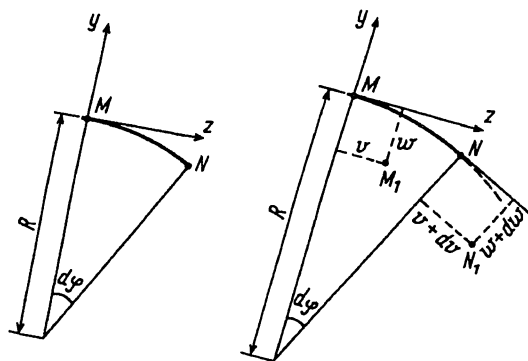


Рис. П.4. К выводу кривизны упругого кольца

изменению угла θ вдоль дуги недеформированного кольца (по определению):

$$k = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (\text{П.7})$$

Рассмотрим ортогональную систему координат: ось Mz направим по касательной к оси кольца, а ось My – по нормали к оси кольца (см. рис. П.4). Отметим, что введенная таким образом система координат является подвижной.

Найдем координаты точек в этой системе с точностью до величин первого порядка малости:

$$\begin{aligned} y_M &= 0; \\ z_M &= 0; \\ y_N &= 0; \\ z_N &= R d\varphi; \\ z_{N_1} &= v + \left(R - w + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) d\varphi; \quad z_{M_1} = v; \\ y_{N_1} &= -w - \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) d\varphi; \quad y_{M_1} = -w. \end{aligned}$$

Допустим, что кольцо подчиняется условию нерастяжимости, т.е. длина элемента нейтрального слоя не изменяется после деформаций. В этом случае длина элемента после деформаций равна:

$$\begin{aligned}
 M_1 N_1 &= \sqrt{(y_{M_1} - y_{N_1})^2 + (z_{M_1} - z_{N_1})^2} = \\
 &= R \sqrt{1 + \frac{1}{R} \left(-w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)^2} = M N.
 \end{aligned}$$

Найдем относительное удлинение ε элемента MN :

$$\varepsilon = \frac{M_1 N_1 - M N}{M N} = \frac{1}{R} \left(-w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right)^2.$$

Удерживая только линейные относительно перемещений слагаемые, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{R} \left(-w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right).$$

Тогда условие нерастяжимости ($\varepsilon = 0$) можно записать в следующем виде:

$$w = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (\text{П.8})$$

Угол θ между касательной (ось Mz) и элементом $M_1 N_1$ можно с точностью до величин первого порядка выразить по формуле

$$\theta = \frac{y_{N_1} - y_{M_1}}{M_1 N_1} \approx \frac{y_{N_1} - y_{M_1}}{R d\varphi} = -\frac{1}{R} \left(v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right).$$

Следовательно, изменение кривизны оси кольца при деформации в его плоскости определяется выражением (используем формулу (П.7))

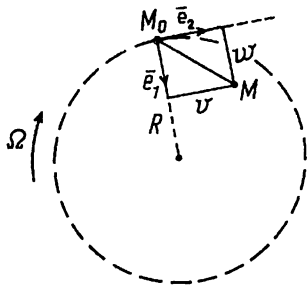
$$k = \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Применяя условие нерастяжимости (П.8), перепишем изменение кривизны:

$$k = -\frac{1}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{П.9})$$

Уравнение движения нерастяжимого кольца, вращающегося в своей плоскости. Рассмотрим кольцевой резонатор, вращающийся в своей плоскости с угловой скоростью Ω (рис. П.5). Векторы \bar{e}_2 и \bar{e}_1 являются единичными векторами касательной и нормали в точке M к недеформированному кольцу.

Рис. П.5. Перемещения кольцевого резонатора



Относительная скорость точки M равна:

$$\bar{V}_{\text{отн}} = \dot{v} \bar{e}_2 + \dot{w} \bar{e}_1.$$

Переносная скорость точки M (при вращении с угловой скоростью Ω)

$$\bar{V}_{\text{пер}} = \Omega(R - w) \bar{e}_2 + v\Omega \bar{e}_1.$$

Зная скорости $\bar{V}_{\text{отн}}$ и $\bar{V}_{\text{пер}}$, выразим кинетическую энергию элемента кольца в точке M , отнесенную к длине самого элемента:

$$T = \frac{1}{2} \rho S \left[(\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2 \right].$$

Потенциальная энергия элемента кольца, отнесенная к длине этого элемента, в соответствии с формулой (П.6) запишется следующим образом:

$$\Pi = \frac{EI}{2R^4} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2.$$

Удельный лагранжиан выражается так:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left[(\dot{v} + R\Omega - w\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2 \right] - \varkappa^2 (w + w'')^2 \right\}, \quad (\text{П.10})$$

где $\varkappa^2 = EI/(\rho SR^4)$, а штрихами обозначена производная по углу.

Для вывода уравнений движения кольцевого резонатора используем принцип Гамильтона, который состоит в следующем. Интеграл

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left(L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w'') + \lambda(t, \varphi) f(v', w) \right) d\varphi dt$$

на действительном движении системы должен принимать наименьшее значение. Здесь $\lambda(t, \varphi)$ – множитель Лагранжа, $f(v', w)$ – уравнение связи, которое в нашем случае имеет вид

$$f(v', w) = v' - w = 0$$

и отражает нерастяжимость нейтрального слоя кольца. Отметим, что пределы интегрирования являются фиксированными.

Для минимизации интеграла приравняем его вариацию нулю:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} & \left(\frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \lambda \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} \delta w' \right) d\varphi dt = 0. \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие вариации производных, преобразуем с помощью интегрирования по частям. Например:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' d\varphi dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial v'} d(\delta v) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v \Big|_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \delta v d\varphi dt = \\
&= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial v'} \right) \delta v d\varphi dt;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' d\varphi dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial w''} d(\delta w') dt = \\
&= \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w' d\varphi dt = \\
&= \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w' \Big|_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w \Big|_{\varphi_1, t_1}^{\varphi_2, t_2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w d\varphi dt = \\
&= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{\partial L}{\partial w''} \right) \delta w d\varphi dt.
\end{aligned}$$

В граничных точках (φ_1, t_1) и (φ_2, t_2) вариации равны нулю. Приравнявая нулю выражения при независимых вариациях δv и δw , получаем уравнения движения упругого кольца:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) + \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \lambda \frac{\partial f}{\partial v} = 0; \\ &\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} - \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} - \frac{\partial L}{\partial w} - \lambda \frac{\partial f}{\partial w'} + \\ &\quad + \frac{d}{d\varphi} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) = 0; \\ &f = v' - w = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{II.11})$$

Последнее уравнение является уравнением связи.

Подставляя в (П.11) функцию Лагранжа (П.10), приходим к уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + \dot{\Omega}(R - w) - \Omega^2 v + \lambda' = 0; \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + \Omega^2(R - w) + \varkappa^2(w^{\text{IV}} + 2w'' + w) + \lambda = 0; \\ v' - w = 0. \end{cases}$$

Это уравнения движения свободного кольца. Если кольцо подвержено действию внешней распределенной нагрузки, проекции которой на векторы \bar{e}_1 и \bar{e}_2 равны p_w и p_v соответственно (это проекции удельной нагрузки), то в правых частях уравнений появятся эти проекции:

$$\begin{cases} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + \dot{\Omega}(R - w) - \Omega^2 v + \lambda' = p_v/(\rho S); \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + \Omega^2(R - w) + \\ \quad + \varkappa^2(w^{\text{IV}} + 2w'' + w) + \lambda = p_w/(\rho S); \\ v' - w = 0. \end{cases} \quad (\text{П.12})$$

Преобразуем уравнения (П.12) вынужденного движения кольцевого резонатора следующим образом: продифференцируем второе уравнение по углу и вычтем из него первое. В результате получим (считая малыми величинами $\Omega^2, \dot{\Omega}$)

$$\begin{cases} \ddot{w}' - \ddot{v} + 2\Omega\dot{v}' + 2\dot{\Omega}w + \varkappa^2(w^{\text{V}} + 2w''' + w') = \frac{1}{\rho S}(p'_w - p_v); \\ v' - w = 0. \end{cases}$$

Далее полученное уравнение продифференцируем по углу φ и исключим переменную v с помощью уравнения связи:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = \frac{1}{\rho S}(p''_w - p'_v). \quad (\text{П.13})$$

Уравнение (П.13) является уравнением движения идеального упругого нерастяжимого кольца, вращающегося в

своей плоскости с угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии, подверженного действию внешней распределенной нагрузки.

Колебания, описываемые уравнением (П.13), – незатухающие, так как не учтены силы внутреннего трения в материале кольца. Колебания реального кольца являются затухающими. Наиболее распространенной моделью механизма внутренней диссипации является модель Кельвина – Фойгта, обобщающая закон Гука на случай неупругих деформаций (см. с. 79):

$$\sigma = E(\varepsilon + \xi \dot{\varepsilon}).$$

В этом случае изгибающий момент (П.5) запишется в виде

$$M = EI \left[\frac{1}{\rho} + \xi \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Тогда уравнение движения кольцевого резонатора преобразуется следующим образом:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega \dot{w}' + \varkappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \varkappa^2 \xi (\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = \frac{1}{\rho S} (p_w'' - p_v'). \quad (\text{П.14})$$

Очень часто вместо коэффициента ξ вводят величину Q , называемую добротностью и определяемую по формуле

$$Q = 1/(\omega \xi),$$

где ω – собственная частота.

Материал резонатора – плавленый кварц – имеет добротность $10^6 \dots 10^7$.

В работе [10] с помощью метода осреднения исследовано уравнение (П.14) с нулевой правой частью. Показано, что функция изменяется по гармоническому закону с экспоненциально затухающей амплитудой. При этом инерциальные свойства стоячей волны не изменяются. Таким образом, диссипация вызывает лишь затухание амплитуды колебаний.

Уравнение (П.14) можно также использовать при исследовании влияния неоднородностей параметров по четвертой гармонике окружного угла (см. гл. 5).

2. Метод Бубнова – Галеркина

Метод Бубнова – Галеркина является простым и эффективным средством приближенного решения дифференциальных уравнений. С его помощью можно решать как задачи статики, так и динамические задачи. Рассмотрим схему решения этим методом задач динамики.

Возьмем уравнения движения динамической системы в следующем виде:

$$D(y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0, \quad (\text{П.15})$$

где D – дифференциальный оператор; y – вектор-функция обобщенных координат.

Приближенное решение задачи (П.15) представляется в виде

$$y = \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x), \quad (\text{П.16})$$

где $c_i(t)$ – некоторые функции времени; $\varphi_i(x)$ – функции координат, которые должны удовлетворять краевым условиям задачи.

Ряд (П.16) подставляется в уравнение (П.15), в результате получается некоторая функция-ошибка [21]

$$L(x, t) \equiv D\left((x, \varphi_i(x), \varphi_i'(x), \dots, \varphi_i^{(k)}(x), c_i(t), \dot{c}_i(t), \ddot{c}_i(t)\right),$$

не равная тождественно нулю.

Алгоритм метода Бубнова – Галеркина состоит в том, что функцию-ошибку $L(x, t)$ ортогонализуют относительно всех функций $\varphi_i(x)$. Ортогонализация состоит в умножении функции $L(x, t)$ на все функции $\varphi_i(x)$ и приравнивании нулю интегралов от полученных произведений. Таким образом, получается система N линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно N неизвестных функций $c_i(t)$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{l_1}^{l_2} L(x, t) \varphi_1(x) dx = 0; \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \int_{l_1}^{l_2} L(x, t) \varphi_N(x) dx = 0.
 \end{aligned}
 \tag{П.17}$$

Отметим, что краевые условия определяются в точках $x = l_1$ и $x = l_2$.

Полученная система (П.17) допускает сравнительно несложное исследование стандартными методами теории дифференциальных уравнений.

Покажем на конкретных примерах применение метода Бубнова – Галеркина.

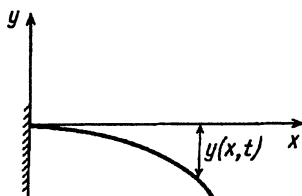


Рис. П.6. Колебания консоли

Пример 1. Рассмотрим колебания консольно закрепленного стержня постоянного поперечного сечения (рис. П.6). Дифференциальное уравнение движения такого стержня имеет вид [21]

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

где $y(x, t)$ – поперечное смещение оси стержня в точке x в момент времени t ; E – модуль Юнга; I – момент инерции; ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения.

Будем искать функцию прогибов приближенно в виде

$$y(x, t) = p(t) \Phi(x), \quad (\text{П.18})$$

где функция $\Phi(x)$ удовлетворяет краевым условиям для консольного закрепления стержня:

$$\Phi(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx} \Big|_{x=0} = 0 - \text{ жесткое защемление}$$

на левом конце,

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3\Phi}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0 - \text{ свободный правый конец.}$$

Очевидно, что функция

$$\Phi(x) = 6l^2x^2 - 4l^2x^3 + x^4 \quad (\text{П.19})$$

удовлетворяет краевым условиям.

Далее для составления дифференциального уравнения относительно функции $p(t)$ применим алгоритм метода Бубнова – Галеркина:

$$\int_0^l \left(EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \Phi(x) dx = 0,$$

где в качестве y берется выражение (П.18), а в качестве $\Phi(x)$ – функция (П.19).

Выполнив интегрирование, получим уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{p} + \frac{9 \cdot 144}{104} \frac{EI}{\rho S l^4} p = 0.$$

Собственная частота колебаний консоли

$$\omega_0 = \frac{3,53}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

Пример 2. В качестве примера рассмотрим колебания кольцевого резонатора. Допустим, что резонатор не вращается и не подвергается действию внешних сил. Тогда уравнение движения (П.13) примет вид

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = 0.$$

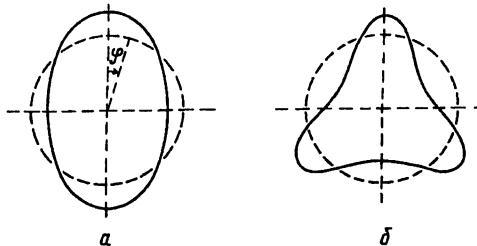


Рис. П.7. Собственные формы колебаний кольцевого резонатора:

a – вторая форма; *б* – третья форма

Для исследования колебаний второй (основной) формы, показанной на рис. П.7, *a*, зададим функцию прогибов в виде

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi. \quad (\text{П.20})$$

Применяя алгоритм метода Бубнова – Галеркина, получаем соотношения

$$\int_0^{2\pi} \left[\ddot{w}'' - \ddot{w} + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') \right] \cos 2\varphi \, d\varphi = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \left[\ddot{w}'' - \ddot{w} + \varkappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') \right] \sin 2\varphi \, d\varphi = 0,$$

где в качестве w берется выражение (П.20).

После интегрирования приходим к системе

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{36\alpha^2}{5} p = 0; \\ \ddot{q} + \frac{36\alpha^2}{5} q = 0. \end{cases}$$

Это два одинаковых гармонических осциллятора с собственной частотой, равной $6\alpha/\sqrt{5}$.

Для определения собственной частоты третьей формы (рис. П.7, б) следует представить прогиб в виде

$$w(\varphi, t) = p_3(t) \cos 3\varphi + q_3(t) \sin 3\varphi.$$

Производя аналогичные выкладки, находим, что частота третьей собственной формы равна $24\alpha/\sqrt{10}$.

Любое колебание кольцевого резонатора является суммой бесконечного числа собственных колебаний вида

$$w(\varphi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) \cos i\varphi + q_i(t) \sin i\varphi.$$

3. Пример технического задания на разработку ВТГ

Разработать в рамках курсового проекта ВТГ со следующими основными характеристиками.

Напряжение питания датчиков перемещения, В	40
Чувствительность по углу, угл. с	3
Точность преобразования фазы, град	0,07
Напряжение системы возбуждения, В	400
Частота системы возбуждения, Гц	3000
Дискретность изменения частоты системы возбуждения, Гц	$5 \cdot 10^{-5}$
Выходное напряжение системы управления жесткостью (электрическая коррекция), В . . .	400

Средние рабочие зазоры, мкм, по внутреннему и наружному корпусу:	
первая гармоника разложения	200...300
вторая гармоника разложения	3...7
третья гармоника разложения	4...6
четвертая гармоника разложения	1...4
Добротность резонатора	$(3...5) 10^6$
Расщепление собственной частоты после механической балансировки, Гц	$(2...3) 10^{-3}$
Расщепление резонансной частоты после электрической балансировки, Гц	0,001...0,0015

За базовую конструкцию принять конструкцию, приведенную на рис. 1.12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альмишев А.И., Мирошников М.А. Вибрационный датчик угловой скорости (ВДУС): А.с. 456208 СССР, 1975.
2. Власов В.З. Избранные труды: В 2 т. Т. 1. М., 1962.
3. Гироскопические системы: Учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. Ч. 2 / Под ред. Д.Е. Пельпора. М.: Высш. шк., 1988. С. 114 – 118.
4. Егармин Н.Е. О прецессии стоячих волн вращающейся осесимметричной оболочки // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 142 – 148.
5. Егармин Н.Е. Динамика неидеальной оболочки и управление ее колебаниями // Известия РАН. Механика твердого тела. 1993. № 4. С. 49 – 59.
6. Егармин Н.Е. Некоторые проблемы динамики волнового твердотельного гироскопа // Препринт ИПМ АН СССР. № 389. М., 1989.
7. Егармин Н.Е. Погрешности волнового твердотельного гироскопа // Препринт ИПМ АН СССР. № 391. М., 1989.
8. Егармин Н.Е. Динамика волнового твердотельного гироскопа // Препринт ИПМ АН СССР. № 272. М., 1986.
9. Егармин Н.Е. Свободные и вынужденные колебания вращающегося вязкоупругого кольца // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 2. С. 150 – 154.
10. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985.
11. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 5. С. 17 – 23.

12. Журавлев В.Ф., Попов А.Л. О прецессии собственной формы колебаний сферической оболочки при ее вращении // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 1. С. 147 – 151.

13. Липатников В.И., Матвеев В.А. Система съема информации твердотельного волнового гироскопа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1997. № 1. С. 109 – 113.

14. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Высш. шк., 1983.

15. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алексин А.В. Идентификация неоднородности распределения массы резонатора волнового твердотельного гироскопа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1997. № 1. С. 104 – 108.

16. Матвеев В.А., Нарайкин О.С., Иванов И.П. Расчет полусферического резонатора на ЭВМ // Известия вузов. Сер. Машиностроение. 1987. № 7. С. 76 – 80.

17. Павловский А.М., Сарапулов С.А. Погрешности твердотельного волнового гироскопа при вибрации основания // Механика гироскопических систем. 1991. № 10. С. 37 – 43.

18. Сарапулов С.А., Киселенко С.П. Влияние маятниковых колебаний на точность твердотельного волнового гироскопа // Механика гироскопических систем. 1991. № 10. С. 50 – 53.

19. Сарапулов С.А., Киселенко С.П., Иосифов А.О. Влияние вращения на динамику неидеального полусферического резонатора // Механика гироскопических систем. 1993. № 12. С. 59 – 66.

20. Стретт Дж. В. (лорд Релей). Теория звука. Т. 1. М.: ГИТТЛ, 1955.

21. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985.

22. Юрин В.Е. Устойчивость колебаний волнового твердотельного гироскопа // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1993. № 3. С. 49 – 59.

23. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci. 1890. V. 7. P. 101 – 111.

24. Burdess J.S. Electrostatic excitation of axisymmetric shell resonators // Sound Vibration. 1986. № 3. P. 271 – 280.

25. Burdess J.S. Gyroscopic devises: Patent 2154379 GB, 1985.

26. *Huang S.G., Soedel W.* Effects of Coriolis acceleration on the free and in-plan vibrations of rotating ring on elastic foundation // Sound Vibration. 1987. № 2. P. 253 – 274.

27. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic vibration bell gyro: Patent 4157041 USA, 1979.

28. *Lynch D.D.* Rotating-wave rotation detector and method of operating same: Patent 3719074 USA, 1979.

29. *Lynch D.D.* Hemispherical resonator gyro // Trans. Aerosp. Electron. System. 1984. № 4. P. 432 – 433.

30. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // Aviation Week. 1982. V. 117. № 25. P. 64 – 72.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
1. Принцип работы и конструкции ВТГ	8
1.1. Принцип работы гироскопа с полусферическим резонатором	8
1.2. Конструкции ВТГ	11
2. Математическая модель резонатора ВТГ	22
2.1. Вывод уравнений движения резонатора ВТГ на основе гипотезы Кирхгофа – Лява	22
2.2. Кольцевая модель резонатора ВТГ	35
2.3. Позиционное возбуждение колебаний резонатора ВТГ	38
2.4. Параметрическое возбуждение колебаний резонатора ВТГ	44
2.5. Система съема информации ВТГ	50
3. Влияние технологических дефектов резонатора, систем возбуждения и съема информации на точность ВТГ . . .	59
3.1. Представление колебаний резонатора ВТГ в виде суммы двух стоячих волн, ортогональных по окружному углу и фазе	59
3.2. Погрешности ВТГ, вызываемые четвертой и второй гармониками неоднородности распределения массы резонатора	62
3.3. Погрешности ВТГ, вызываемые вибрациями основания . .	70
3.4. Погрешности ВТГ, вызываемые разнородностью резонатора	76
3.5. Погрешности ВТГ, связанные с дефектами систем возбуждения резонатора	82

3.6. Погрешности выставки электродов съема для ВТГ-ДУС . . .	86
3.7. Интерпретация формулы для скорости ухода ВТГ, имеющего дефект по четвертой гармонике	89
3.8. Определение величины расщепления частоты и ориентации собственных осей жесткости	92
4. Принципы управления стоячей волной в разночастотном резонаторе ВТГ	94
4.1. Принцип работы системы фазовой автоподстройки частоты	94
4.2. Принципы коррекции собственных осей жесткости резонатора ВТГ с помощью дискретных электродов	105
5. Балансировка резонатора ВТГ	113
5.1. Общие принципы балансировки	113
5.2. Электрическая балансировка	119
5.3. Методика определения собственных осей жесткости и расщепления частоты, основанная на снятии амплитудно- и фазочастотной характеристик	121
5.4. Методика определения расщепления частоты, обусловленного четвертой гармоникой дефекта плотности, основанная на снятии фазоугловой характеристики	123
5.5. Методика идентификации первых четырех гармоник неоднородности распределения массы резонатора ВТГ . . .	130
5.6. Результаты испытаний ВТГ	138
Приложения	145
1. Вывод уравнения движения кольцевого резонатора	145
2. Метод Бубнова – Галеркина	156
3. Пример технического задания на разработку ВТГ	160
Список литературы	162

ABSTRACT

In the manual "Design of the Solid State Wave Gyro" by V.A. Matveev, V.I. Lipatnikov and A.V. Alekhin the general problems of the solid state wave gyro (SWG) design including selection of the calculation model, device error analysis, recommendations for determining the features of the gyro itself, of resonator control systems, data acquisition and processing systems, gyro balancing and testing methods, are considered.

Brief bibliographic survey in the introduction allows to go to the analysis of the resonator known models - hemispherical and ring-shaped ones. The ring-shaped model looks more convenient for the SWG engineering calculation, in particular, of its control systems. The hemispherical model is used to determine the scale factor and to investigate the gyro behavior under real operating conditions (vibration, overloading, surroundings temperature variation, etc.).

Selection of the SWG model allows to perform analysis of its essential errors originated by the technological deflections of the resonator, excitement and data acquisition systems. In particular, the SWG dynamics in the modes of position and parametric excitement, with different oscillation frequencies along two mutually orthogonal axis systems, is investigated. Besides, geometric defects of the resonator and enclosure manufacturing are discussed as well as an influence of power supply instability and energy dissipation at the resonator movement on the instrument accuracy.

In the manual a problem of the resonator standing wave control is analysed. The schemes of the phase frequency autotuning system, of 16-electrode system for correcting the standing wave, are presented. Recommendations for realization of such schemes are given.

The instrument balancing method assumes a particular importance for developing the highly precise SWG. Different kinds of balancing - mechanical, "electrical", and "algorithmic" ones, while the SWG output data processing, are considered.

In order to create the resonator balancing method, the obtained expressions for the instrument errors are being applied for identification of the resonator mass distribution non-homogeneity at presence the longitudinal and lateral vibration.

An original method of the SWG balancing is proposed. The method takes into account the resonator mass distribution irregularity.

Schematic diagrams of the excitement and data acquisition systems illustrate this original method of the instrument balancing. Construction of the model for SWG drift rate is given at the end of the book. This model is approved by the results of the instrument testing under factory conditions.

The manual is designated for students and post-graduates specializing in gyro devices and navigation complexes as well as for engineers and researchers working in the field of gyro instrumentation and control systems.

Учебное издание

**Матвеев Валерий Александрович
Липатников Василий Иванович
Алехин Алексей Викторович**

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО
ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА**

Редактор *Е.В. Авалова*
Художник *С.С. Водчиц*
Технический редактор *В.А. Товстоног*

Оригинал-макет подготовлен в издательстве
МГТУ им. Н.Э. Баумана

ЛР № 020523 от 25.04.97

Сдано в набор 10.10.07

Подписано в печать 20.01.98

Формат 60×90 1/16

Печать офсетная

Бумага офсетная № 1

Усл. печ. л. 10,5

Уч.-изд. л. 10,19

Тираж 500 экз.

Изд. № 109

Зак. 3713

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.
Тел. 263-60-45

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ

140010, г. Люберцы, Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.

Тел. 554-21-86

